

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

А.І. ГРАБЧЕНКО, В.Л. ДОБРОСКОК

ТЕОРІЯ 3D МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник

Харків – 2009

УДК 004.921:621
ББК 32.973:34.5
Г - 75



Публікацію навчального посібника здійснено за фінансової підтримки Європейської Комісії в рамках виконання проекту за програмою TEMPUS "Навчання українських інженерів комп'ютерному промислому проектуванню (дизайну)"

Дане видання відображає лише думку авторів; Європейська Комісія не несе відповідальності за інформацію представлену в посібнику.

Edition of the manual is provided within the financial support by the EU Commission in the frameworks of Tempus Project "Computer Aided Industrial Design Training for Ukrainian Engineers".

This publication reflects the views only of the author and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information therein.

Рецензенти:

Тонконогий В.М. - д-р техн. наук, директор Інституту промислових технологій, дизайну та менеджменту Одеського національного політехнічного університету, Наконечний М.Ф. – канд. техн. наук, доцент НТУ "ХПІ"

Затверджено редакційно-видавничою радою університету, протокол № 2 від 19.06.2009 р.

Г - 75
Грабченко А.І., Доброскок В.Л. Теорія 3D моделювання: Навч. посібник. – Х.: НТУ "ХПІ", 2009. – 230 с.

ISBN 978-966-8944-65-5

Навчальний посібник підготовлено згідно з навчальним планом магістерського курсу "Автоматизований промисловий дизайн" по спеціальності 8.05050201 "Технологія машинобудування", розробленим відповідно до спільного європейського проекту TEMPUS у Національному технічному університеті "Харківський політехнічний інститут". Посібник призначено для тих, хто вивчає і використовує в роботі 3D моделювання для рішення задач комп'ютерного промислового дизайну (проектування). Він присвячений математичному апарату цих систем.

Посібник призначено для магістрантів технічних вузів, що вивчають курс "Теорія 3D моделювання", а також може бути корисним студентам всіх інженерних спеціальностей і аспірантам.

ISBN 978-966-8944-65-5

© НТУ «ХПІ», 2009.

© Грабченко А.І., Доброскок В.Л.



В реалізації даного проекту задіяні наступні ВНЗ:

The following higher education institutions are involved in project realization:

Житомирський державний технологічний університет

Zhytomyr State Technological University



*Національний технічний університет
"Харківський Політехнічний Інститут"*

*National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"*



Запорізький національний технічний університет

Zaporizhzhya National Technical University



Національний авіаційний Університет

National Aviation University



Технічний університет м. Дрезден

Technical University of Dresden



Технічний університет м. Ліберець

Technical University of Liberec



ABSTRACT

The offered textbook is intended for those who studies and uses in work 3D modelling for the decision of computer industrial design. It is devoted to the mathematical tool of these systems. In a basis of the textbook it is taken works [1, 2].

Computers allow to create models of different objects. With their help it is possible to see object not existing yet, to receive its geometrical characteristics, to execute research of its physical properties by numerical experiments, to make necessary changes, to prepare manufacture and, to make object. This purpose is serve CAD/CAM/CAE systems. A basic element of such systems is the mathematical model of geometry of projected object.

In work with systems 3D modelling uses different areas of knowledge. The theoretical basis of geometrical modelling is differential and analytical geometry, topology and sections of calculus mathematics. Geometrical modelling studies methods of plotting of lines, surfaces and solid, methods of performance above them different operations and methods of management of models.

Section 1 is devoted to theoretical bases of geometrical modelling.

In section 2, 3 the method of modelling of different curves and surfaces are described, beginning from elementary and finishing rational curves and surfaces on the basis of B-splines (NURBS by objects).

In section 4, 5 principles of construction solid. For construction of bodies topological concepts are considered.

Last section 6 is devoted computer graphics.

The textbook is prepared according to the curriculum master's course "Automated industrial design" on a speciality "Technology of mechanical engineering", developed within the limits of Joint European Project Tempus "Computer Aided Industrial Design Training for Ukrainian Engineers" on department "Integrated technologies of mechanical engineering" M.F. Semka's name of National Technical University "Kharkiv Polytechnical Snsitute".

Authors express sincere gratitude to N.F. Nakonechnii, E.K. Sevidova and O.V. Titarenko for remarks to the manuscript.

TABLE OF CONTENTS

FOREWORD	9
SECTION 1. BASIC OF GEOMETRICAL 3D MODELLING ...	11
1.1. The description of geometrical objects	12
1.2. Transformation of Cartesian rectangular coordinates	15
1.3. Modification of vectors and points	21
1.4. Homogeneous coordinates	24
1.5. Geometry of curves	26
1.6. Geometry of two-dimensional curves	32
1.7. Geometry of surfaces	34
1.8. Mathematical model of geometry of objects	35
1.9. Systems of geometrical modelling	36
Questions for the independent control	41
SECTION 2. MODELLING OF CURVES	43
2.1. Mathematical model of curves	43
2.2. Analytical lines	44
2.3. Curves of the second order	51
2.4. Splines	54
2.5. Bezier splines	64
2.6. B-splines	69
2.7. NURBS curves	73
2.8. Lines which are based on lines	75
2.9. Complex curves	79
2.10. Two-dimensional curves	81
2.11. Ways of curve construction	82
Questions for the independent control	84
SECTION 3. MODELLING OF SURFACES	86
3.1. Types of the equations of surfaces	86
3.2. Bilinear surface	87
3.3. Kuna patch	89
3.4. Bicubic patch	91
3.5. Bezie Surface	91
3.6. B-spline surface	93
3.7. NURBS surface	94
3.8. Ways of surfaces construction	95
3.9. Crossing of surfaces	97
Questions for the independent control	98

SECTION 4. TOPOLOGY OF SHELL	99
4.1. Topological objects	99
4.2. Eulerian characteristic of shells	102
4.3. Connectivity of shells.....	107
4.4. Shells orientation	110
4.5. Shells for modelling bodies	113
4.6. Surfacing and solid modelling	118
Questions for the independent control	119
SECTION 5. 3D MODELLING OF BODIES	120
5.1. Mathematical model of a solid	120
5.2. The elementary bodies	125
5.3. The bodies received by movement of a flat contour	135
5.4. Construction of a body on plane outline	141
5.5. A body in the sheet form.....	142
5.6. Boolean operations	143
5.7. Cutting of a body by a surface	159
5.8. Construction of a symmetric body	161
5.9. Construction equidistant body shell	164
5.10. Construction of a thin-walled body	167
5.11. Rounding edges of a body	172
5.12. Facets construction of body edges	178
5.13. Some features of bodies construction	179
5.14. Sequence of body modelling	181
Question for the independent control.	183
SECTION 6. COMPUTER GRAPHICS AT 3D MODELLING	184
6.1. Visualization of geometrical objects	184
6.2. Parallel projections to a plane	186
6.3. The central projections to a plane	189
6.4. Polygons of curves and surfaces	193
6.5. Lines of a sketch	197
6.6. Definition of a visible part of geometrical objects	203
6.7. Triangulation of surfaces and bodies	207
6.8. Light modelling	212
6.9. The description of light	220
6.10. Formation of realistic images	222
Questions for the independent control	228
THE LITERATURE LIST	230

ЗМІСТ

ВСТУП.....	9
РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ ГЕОМЕТРИЧНОГО 3D	
МОДЕЛЮВАННЯ	11
1.1. Опис геометричних об'єктів.....	12
1.2. Перетворення декартових прямокутних координат	15
1.3. Модифікації векторів і точок.....	21
1.4. Однорідні координати	24
1.5. Геометрія кривих ліній.....	26
1.6. Геометрія двомірних кривих.....	32
1.7. Геометрія поверхонь.....	34
1.8. Математична модель геометрії об'єктів.....	35
1.9. Системи геометричного моделювання.....	36
Питання для самостійного контролю.....	41
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ	43
2.1. Математична модель кривих ліній.....	43
2.2. Аналітичні лінії.....	44
2.3. Криві другого порядку.....	51
2.4. Сплайни.....	54
2.5. Криві Без'є.....	64
2.6. В-сплайни	69
2.7. NURBS криві	73
2.8. Лінії, що базуються на лініях.....	75
2.9. Складні криві.....	79
2.10. Двомірні криві.....	81
2.11. Способи побудови ліній.....	82
Питання для самостійного контролю.....	84
РОЗДІЛ 3. МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ	86
3.1. Типи рівнянь поверхонь	86
3.2. Білінійна поверхня	87
3.3. Кусок Куна.....	89
3.4. Бікубічний шматок.....	91
3.5. Поверхня Без'є.....	91
3.6. В-сплайнова поверхня	93
3.7. Поверхня NURBS.....	94
3.8. Способи побудови поверхонь.....	95
3.9. Перетинання поверхонь.....	97
Питання для самостійного контролю.....	98

РОЗДІЛ 4. ТОПОЛОГІЯ ОБОЛОНОК.....	99
4.1. Топологічні об'єкти.....	99
4.2. Ейлерова характеристика оболонок.....	102
4.3. Зв'язність оболонок.....	107
4.4. Орієнтовність оболонок.....	110
4.5. Оболонки для моделювання тіл.....	113
4.6. Поверхневе і твердотільне моделювання.....	118
Питання для самостійного контролю.....	119
РОЗДІЛ 5. 3D МОДЕЛЮВАННЯ ТІЛ.....	120
5.1. Математична модель твердого тіла.....	120
5.2. Найпростіші тіла.....	125
5.3. Тіла, отримані рухом плоского контура.....	135
5.4. Побудова тіла по плоским перерізам.....	141
5.5. Тіло у формі листа.....	142
5.6. Булеві операції над тілами.....	143
5.7. Різання тіла поверхнею.....	159
5.8. Побудова симетричного тіла.....	161
5.9. Побудова еквідистантної оболонки тіла.....	164
5.10. Побудова тонкостінного тіла.....	167
5.11. Скруглення ребер тіла.....	172
5.12. Побудова фасок ребер тіла.....	178
5.13. Деякі особливості побудови тіл.....	179
5.14. Послідовність моделювання тіл.....	181
Питання для самостійного контролю.....	183
РОЗДІЛ 6. КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА ПРИ 3D	
МОДЕЛЮВАННІ.....	184
6.1. Візуалізація геометричних об'єктів.....	184
6.2. Паралельні проєкції на площину.....	186
6.3. Центральні проєкції на площину.....	189
6.4. Полігони кривих і поверхонь.....	193
6.5. Лінії нарису.....	197
6.6. Визначення видимої частини геометричних об'єктів.....	203
6.7. Триангуляція поверхонь і тіл.....	207
6.8. Моделювання світла.....	212
6.9. Опис кольору.....	220
6.10. Формування реалістичних зображень.....	222
Питання для самостійного контролю.....	228
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	230

ВСТУП

Запропонований призначено для тих, хто вивчає і використовує в роботі 3D моделювання для вирішення комп'ютерного промислового дизайну (проектування). Він присвячений математичному апарату цих систем. В основу покладені роботи [1, 2].

Комп'ютери дозволяють створювати чисельні моделі різних об'єктів. З їх допомогою можна побачити ще не існуючий об'єкт, отримати його геометричні характеристики, виконати дослідження його фізичних властивостей шляхом постановки чисельних експериментів, внести необхідні зміни, підготувати виробництво і, нарешті, виготовити об'єкт. Інструментом для всього цього служать CAD/CAM/CAE системи. С елементом таких систем є математична модель геометрії проєктованого об'єкту.

У роботі з системами 3D моделювання використовують різні області знання. Теоретичною основою геометричного моделювання є диференціальна і аналітична геометрія, топологія і розділи обчислювальної математики. Геометричне моделювання вивчає методи побудови кривих ліній, поверхонь і твердих тіл, методи виконання над ними різних операцій і методи управління чисельними моделями.

Розділ 1 присвячено теоретичним основам геометричного моделювання.

У розд. 2, 3 описані методи моделювання різних кривих ліній і поверхонь, починаючи від елементарних і кінчаючи раціональними кривими і поверхнями на основі B-сплайнів (NURBS об'єктами).

У розд. 4, 5 розглянуто принципи побудови твердих тіл. Для побудови тіл залучаються топологічні поняття.

Останній розділ 6 присвячено комп'ютерній графіці.

Для роботи з потрібно мати знання з математичного аналізу.

У списку використаних джерел наведено роботи, результати яких були використані в даному .

Навчальний посібник підготовлено згідно з навчальним планом магістерського курсу "Автоматизований промисловий дизайн" за спеціальністю 8.05050201 "Технологія машинобудування», розробленим відповідно до спільного

європейського проекту ТЕМПУС у Національному технічному університеті "Харківський політехнічний інститут».

Автори висловлюють щирю вдячність співробітникам кафедри "Інтегровані технології машинобудування" ім. М.Ф. Семка НТУ "Харківський політехнічний інститут", а особливо Наконечному М.Ф., Севідовій Е.К. і Тітаренко О.В. за слушні зауваження до рукопису.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ ГЕОМЕТРИЧНОГО 3D МОДЕЛЮВАННЯ

Підсистеми геометричного моделювання (ГМ) і машинної графіки (МГ) займають центральне місце в машинобудівних САПР-К (системах автоматизованого проектування). Конструювання виробів в них, як правило, проводиться в інтерактивному режимі при операції геометричними моделями, т. е. математичними об'єктами, що відображають форму деталей, структуру складальних вузлів і можливо деякі додаткові параметри (масу, момент інерції, кольори поверхні і т. п.).

У підсистемах ГМ і МГ типовий маршрут обробки даних передбачає отримання проектного рішення у прикладній програмі, його представлення у вигляді геометричної моделі (геометричне моделювання), підготовку проектного рішення до візуалізації, власне візуалізацію в апаратурі робочої станції і при необхідності коректування рішення в інтерактивному режимі. Дві останні операції реалізуються на базі апаратних засобів машинної графіки. Коли говорять про математичне забезпечення ГМ і МГ, мають на увазі, перш за все моделі, методи і алгоритми для геометричного моделювання і підготовки до візуалізації. При цьому часто саме математичне забезпечення підготовки до візуалізації називають математичним забезпеченням машинної графіки.

Розрізняють математичне забезпечення двовимірного (2D) і тривимірного (3D) моделювання. Основною сферою застосування 2D-графіки є підготовка креслярської документації в машинобудівних САПР. У розвинених машинобудівних САПР використовують як 2D, так і 3D моделювання для синтезу конструкцій, представлення траєкторій робочих органів верстатів при обробці заготовок, генерації сітки кінцевих елементів при аналізі міцності і т. п.

В процесі 3D моделювання створюються геометричні моделі, тобто моделі, що відображають геометричні властивості виробів. Розрізняють геометричні моделі *каркасні (дротяні)*, поверхневі і об'ємні (*твердотільні*).

Каркасна модель представляє форму деталі у вигляді кінцевої безлічі ліній, що лежать на поверхнях деталі. Для кожної лінії відомі координати кінцевих точок і вказана їх інцидентність

(умова приналежності) ребрам або поверхням. Оперувати каркасною моделлю на подальших операціях маршрутів проектування незручно, і тому каркасні моделі в даний час використовуються достатньо рідко.

Поверхнева модель відображає форму деталі за допомогою завдання поверхонь, що обмежують її, наприклад, у вигляді сукупності даних про грані, ребра і вершини.

Особливе місце займають моделі деталей з поверхнями складної форми, так званими складними (скульптурними) поверхнями. До таких деталей відносяться корпуси багатьох транспортних засобів (наприклад, суден, автомобілів), деталі, що обтікають потоками рідини і газів (лопатки турбін, крила літаків) і ін.

Об'ємні моделі відрізняються тим, що в них в явній формі містяться дані щодо приналежності елементів внутрішньому або зовнішньому по відношенню до деталі простору.

Розглянуті моделі відображають тіла із замкнутими об'ємами, що є так званими *багатообразами* (*manifold*). Деякі системи геометричного моделювання допускають операцію *небагатообразними* моделями (*nonmanifold*), прикладами яких можуть бути моделі тіл, що дотикаються один одного в одній точці або уподовж прямої. Небагатообразні моделі зручні в процесі конструювання, коли на проміжних етапах корисно працювати одночасно з тривимірними і двовимірними моделями без задання товщини стінок конструкції і т. п.

1.1. Опис геометричних об'єктів

1.1.1. Геометричні об'єкти

Кінцевою метою 3D моделювання є побудова математичних моделей геометрії об'єктів. Ці моделі потрібні для рішень, проведення досліджень і виробництва матеріальних цінностей.

Геометричне моделювання вивчає методи побудови математичної моделі, що описує геометричні властивості предметів навколишнього світу. Як вже зазначалось, геометричне моделювання базується на аналітичній і диференціальній геометрії, обчислювальній математиці, варіаційному, топології і розробляє

власні математичні методи моделювання.

Інструментом для геометричного моделювання служать математичні методи вирішення тих або інших Використовувані методи дозволяють описувати геометричні властивості об'єктів, створювати їх математичні моделі і досліджувати їх шляхом проведення різних розрахунків і чисельних експериментів. За необхідності модельовані об'єкти редагуються і візуалізуються (побудова їх графічних відображень).

Для опису геометричних властивостей навколишніх предметів будують тверді тіла або просто тіла. Тіла у свою чергу описують, лініями і поверхнями. Усі вони мають певні загальні властивості, тому ними можна оперувати як об'єктами. Т, лінії, поверхні і тіла називатимемо геометричними об'єктами.

Геометричні об'єкти служать основними елементами математичної моделі геометрії реальних або уявних об'єктів. Будуватимемо їх в тривимірному евклідовому просторі, вважаючи за їх незмінними в часі.

У більшості випадків використовують декартову систему координат. У декартовій системі базисні вектори мають однакову довжину і постійний напрям в будь-якому місці простору. Це спрощує опис об'єктів, оскільки базисні вектори при диференціюванні виступають в ролі констант. Розглянемо також опис геометричних об'єктів у криволінійних системах координат.

1.1.2. Позначення

Для кількісних характеристик геометричних об'єктів використовують скалярні величини, вектори, а також тензори. Скалярні величини позначатимемо рядковими латинського або грецького алфавіту. Вектори в просторі позначатимемо рядковими латинського алфавіту, виділеними жирним шрифтом. Двомірні вектори позначатимемо рядковими латинського алфавіту, виділеними жирним курсивом. Т позначатимемо прописними латинськими. Тензори і матриці позначатимемо прописними латинського алфавіту, виділеними жирним шрифтом.

Систему координат з початком в точці O і базисними векторами e_1, e_2, e_3 позначатимемо через Oe_1, e_2, e_3 .

Для векторів в просторі використовуватимемо записи типу

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3]^T, \quad (1.1)$$

де r_1, r_2, r_3 - компоненти вектору \mathbf{r} .

В даному розділі зручніше використовувати позначення компонент векторів з індексами, що відповідають номеру. В інших розділах також використовують позначення компонент векторів через x, y, z .

Для опису складних геометричних об'єктів потрібні вектори, як у тривимірному, так і у двовірному просторі, наприклад, на області параметрів поверхні. Для двовірних векторів використовуватимемо запис типу

$$\mathbf{p} = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = [p_1 \quad p_2]^T, \quad (1.2)$$

де p_1, p_2 - компоненти вектору \mathbf{p} .

Операцію скалярного векторів позначатимемо точкою: наприклад

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (1.3)$$

Символом \times позначатимемо операцію векторного векторів: наприклад

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3. \quad (1.4)$$

Запис двох векторів поряд \mathbf{ab} означатиме операцію диядного векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} , наприклад

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

1.1.3. T

Геометричне моделювання доцільно розпочинати вивчати з простих об'єктів з поступовим переходом до складнішим. Точка \mathbf{R}

простору в загальному випадку описується координатами u^1, u^2, u^3 деякої системи координат. У декартовій прямокутній системі координат точку можна описати за допомогою радіус-вектору $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$. Радіус-вектор визначає перетворення перенесення, що переводить початкову точку декартової системи координат в задану точку простору. Компоненти радіус-вектору точки дорівнюють її координатам.

Радіус-вектор на відміну від просто вектору пов'язаний з початком координат. Ця різниця позначається на формулах перетворення координат і на формулах зміни положення в просторі.

1.2. Перетворення декартових прямокутних координат

1.2.1. Перетворення координат у просторі

Розглянемо, як зміняться декартові прямокутні координати точки в просторі при переході від однієї системи координат до іншої. Хай в просторі задані дві декартові прямокутні системи координат: $Oe_1e_2e_3$ і $Qi_1i_2i_3$. Хай положення деякої точки R в першій системі описується координатами r_1, r_2, r_3 , яким відповідає вектор \mathbf{r} , а в другій системі положення цієї ж точки описується координатами x_1, x_2, x_3 , яким відповідає вектор \mathbf{x} (рис. 1.1).

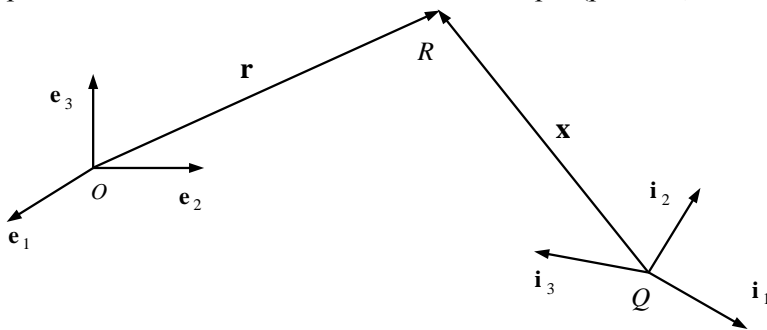


Рисунок 1.1 - Схема перетворення координат точок у просторі.

Точка R записується у розглянутих системах координат рівністями:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3; \\ \mathbf{x} &= x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Позначимо через \mathbf{q} вектор, направлений з точки O в точку Q :

$$\mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3.\tag{1.7}$$

Якщо до вектору \mathbf{q} додати вектор \mathbf{x} , то отримаємо вектор \mathbf{r} . Складання векторів виконаємо в першій системі координат, оскільки саме в ній дана точка описується вектором \mathbf{r} . Для цього розкладемо орти $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ за ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{i}_2 &= a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{i}_3 &= a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3,\end{aligned}\tag{1.8}$$

де $a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ - компоненти ортів $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ у системі координат $Q\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$.

Склавши вектори \mathbf{q} та \mathbf{x} , отримаємо рівність

$$r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3 = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + q_1)\mathbf{e}_1 +$$

$$+ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + q_2)\mathbf{e}_2 + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + q_3)\mathbf{e}_3,$$

звідки слідують формули перетворення координат точки при переході з системи $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в систему координат $Q\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$.

$$\begin{aligned}r_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + q_1, \\ r_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + q_2, \\ r_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + q_3.\end{aligned}\tag{1.9}$$

У матричному представленні (1.9) має

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q},\tag{1.10}$$

де \mathbf{A}^T - транспонована матриця повороту:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.\tag{1.11}$$

Рядки матриці \mathbf{A} складені з компонент векторів $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$.

Помноживши кожне з рівнянь (1.8) скалярно на $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$,

отримаємо ще один вираз для компонент матриці \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{e}_1, & a_{12} &= \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{e}_2, & a_{13} &= \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{e}_3, \\ a_{21} &= \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e}_1, & a_{22} &= \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e}_2, & a_{23} &= \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e}_3, \\ a_{31} &= \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e}_1, & a_{32} &= \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e}_2, & a_{33} &= \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.12)$$

З (1.12) видно, що базисні вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в системі координат з базисними векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ виражаються через ті ж коефіцієнти, які присутні у (1.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{i}_1 + a_{21}\mathbf{i}_2 + a_{31}\mathbf{i}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= a_{12}\mathbf{i}_1 + a_{22}\mathbf{i}_2 + a_{32}\mathbf{i}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= a_{13}\mathbf{i}_1 + a_{23}\mathbf{i}_2 + a_{33}\mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Дійсно, якщо кожен із рівностей (1.13) помножити скалярно на $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, то отримаємо рівність (1.12).

Позначимо через $\mathbf{o} = o_1\mathbf{i}_1 + o_2\mathbf{i}_2 + o_3\mathbf{i}_3$ вектор, що направлений з точки Q в точку O .

Виконавши складання векторів \mathbf{o} і \mathbf{r} в другій системі координат, отримаємо вектор \mathbf{x} .

Прирівнявши відповідні компоненти векторів, отримаємо формули перетворення координат даної точки при переході з системи $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в систему координат $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 + o_1, \\ x_2 &= a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + a_{23}r_3 + o_2, \\ x_3 &= a_{31}r_1 + a_{32}r_2 + a_{33}r_3 + o_3. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Якщо формули (1.14) застосувати для точки Q , ми отримаємо формули, що виражають компоненти o_1, o_2, o_3 вектору \mathbf{o} через компоненти q_1, q_2, q_3 вектору \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} o_1 &= -a_{11}q_1 - a_{12}q_2 - a_{13}q_3, \\ o_2 &= -a_{21}q_1 - a_{22}q_2 - a_{23}q_3, \\ o_3 &= -a_{31}q_1 - a_{32}q_2 - a_{33}q_3. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Підставивши останні в (1.14), отримаємо:

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}(r_1 - q_1) + a_{12}(r_2 - q_2) + a_{13}(r_3 - q_3), \\x_2 &= a_{21}(r_1 - q_1) + a_{22}(r_2 - q_2) + a_{23}(r_3 - q_3), \\x_3 &= a_{31}(r_1 - q_1) + a_{32}(r_2 - q_2) + a_{33}(r_3 - q_3).\end{aligned}\quad (1.16)$$

У матричному представленні перетворення (1.14) мають вигляд:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{o} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}). \quad (1.17)$$

Помноживши рівність (1.17) зліва на \mathbf{A}^T і додавши вектор \mathbf{q} , відповідно до формули (1.10) ми повинні отримати вектор \mathbf{r} . Звідси витікає, що

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{E}; \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}. \quad (1.18)$$

Ми бачимо, що транспонована матриця повороту дорівнює своїй зворотній матриці, тобто матриця повороту системи координат є ортогональною. Звідси ж витікає, що визначник матриці \mathbf{A} дорівнює одиниці:

$$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}| = 1. \quad (1.19)$$

Перетворення компонент векторів у просторі. Хай деякий просторовий вектор в системі координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ описується виразом $r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3$, а в системі координат $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ цей же вектор описується виразом $x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$. З урахуванням формул (1.8) і (1.13) отримаємо, що перетворення компонент векторів описуються формулами (1.9) і (1.14), в яких компоненти q_1, q_2, q_3 і o_1, o_2, o_3 слід покласти рівними нулю.

1.2.2. Перетворення координат двомірних

Нехай на площині задано дві декартові прямокутні системи координат: $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ і $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$. Хай положення деякої точки P в першій системі описується вектором $\mathbf{p} = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2$, а в другій системі положення цієї ж точки описується вектором $\mathbf{u} = u_1\mathbf{j}_1 + u_2\mathbf{j}_2$ (рис. 1.2).

Розкладемо вектор \mathbf{q} , направлений з точки O в точку Q , а

також орты $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ по ортам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{q} = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{j}_1 = a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{j}_2 = a_{21} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2.$$

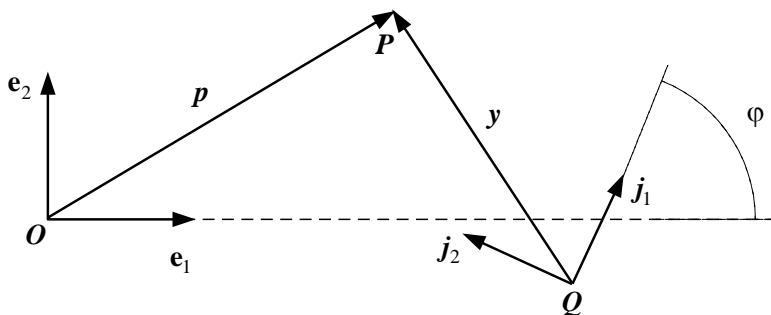


Рисунок 1.2 - Схема перетворення координат двовірних .

Склавши вектори \mathbf{q} і \mathbf{y} , отримаємо:

$$p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 = (a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + q_1) \mathbf{e}_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + q_2) \mathbf{e}_2.$$

Звідси слідують формули перетворення координат точки:

$$p_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + q_1, \quad (1.22)$$

$$p_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + q_2.$$

Матричне представлення (1.22) збігається з (1.10): $\mathbf{p} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y} + \mathbf{q}$. Оскільки базисні вектори \mathbf{j}_1 і \mathbf{j}_2 мають одиничну довжину, рівностям (1.21) можна надати вид

$$\mathbf{j}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{j}_2 = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2,$$

якщо обидві координатні системи праві або ліві, і

$$\mathbf{j}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad (1.24)$$

$$\mathbf{j}_2 = \sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2,$$

якщо одна з координатних систем права, а інша - ліва. Кут φ

між векторами \mathbf{e}_1 і \mathbf{j}_1 відлічується від \mathbf{e}_1 у бік вектору \mathbf{e}_2 . Хай обидві системи координат є правими (для систем різної орієнтації слід змінити знак a_{21} і a_{22} на протилежний). Матриця повороту систем координат, виражена через кут, має вигляд

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Перетворення координат (1.22) при переході від системи з базисними векторами \mathbf{e}_1 і \mathbf{e}_2 до системи координат з базисними векторами \mathbf{j}_1 і \mathbf{j}_2 прийме вигляд

$$\begin{aligned} p_1 &= y_1 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi + q_1, \\ p_2 &= y_1 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi + q_2. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Вирішивши систему рівнянь (1.26) відносно y_1 і y_2 , отримаємо зворотнє перетворення

$$\begin{aligned} y_1 &= (p_1 - q_1) \cos \varphi + (p_2 - q_2) \sin \varphi, \\ y_2 &= -(p_1 - q_1) \sin \varphi + (p_2 - q_2) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Якщо в (1.27) покласти $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, то отримаємо координати точки O в системі з базисними векторами \mathbf{j}_1 , \mathbf{j}_2 , виражені через компоненти q_1 і q_2 :

$$\begin{aligned} o_1 &= -q_1 \cos \varphi - q_2 \sin \varphi, \\ o_2 &= q_1 \sin \varphi - q_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.28)$$

У системі координат з базисними векторами \mathbf{j}_1 , \mathbf{j}_2 координати o_1 і o_2 дорівнюють компонентам вектору \mathbf{o} , побудованого з точки Q в точку O . З урахуванням формул (1.28) перетворення координат точки (1.27) матиме вигляд

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + o_1 = p_1 \cos \varphi + p_2 \sin \varphi + o_1, \\ y_2 &= a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + o_2 = -p_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi + o_2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Виразимо з (1.28) координати q_1 і q_2 через координати o_1 і o_2 та підставимо їх в (1.26). В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} p_1 &= (y_1 - o_1) \cos \varphi - (y_2 - o_2) \sin \varphi, \\ p_2 &= (y_1 - o_1) \sin \varphi + (y_2 - o_2) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Матричні записи перетворень координат точки при переході від однієї декартової прямокутної системи координат до іншої у двовірному просторі і тривірному просторі збігаються.

Перетворення компонент двовірних векторів. Хай деякий двовірний вектор в системі координат Oe_1e_2 описується виразом $p_1e_1 + p_2e_2$, а в системі координат Oj_1j_2 цей же вектор описується виразом $y_1j_1 + y_2j_2$. З урахуванням формул (1.23) отримуємо, що перетворення компонент двовірних векторів описуються формулами (1.26) і (1.27), в яких компоненти q_1, q_2 слід покласти рівними нулю.

1.3. Модифікації векторів і

Модифікаціями називатимемо зміни положення і форми геометричних об'єктів. Багато ліній, поверхні і тіла описуються зв'язаним (певним чином) набором , векторів і скалярів. При зміні положення геометричного об'єкту у просторі потрібно виконувати відповідні модифікації радіус-векторів і векторів, що описують даний об'єкт.

1.3.1. З в просторі

Простою модифікацією точки є її зсув в просторі на вектор зсуву \mathbf{t} . Положення точки до модифікації називатимемо початковим, і описуватимемо радіус-вектором \mathbf{r}_0 . Положення точки після модифікації називатимемо новим, і описуватимемо радіус-вектором \mathbf{r} . Положення точки після модифікації описуватиметься радіус-вектором, рівним сумі радіус-вектору її початкового положення \mathbf{r}_0 і вектору зсуву \mathbf{t} :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{t}. \quad (1.31)$$

Компоненти вектору \mathbf{r} дорівнюють сумі відповідних компонент векторів \mathbf{r}_0 і \mathbf{t} .

1.3.1. Поворот в просторі навколо осі

Розглянемо, як зміниться радіус-вектор точки при її повороті навколо деякої осі. Хай початкове положення точки описується радіус-вектором \mathbf{r}_0 , а вісь обертання визначається точкою Q і ортом \mathbf{v} . Хай \mathbf{q} є радіус-вектор точки Q . Виконаємо поворот точки навколо осі на кут α проти годинникової стрілки, якщо погляд направити назустріч вектору \mathbf{v} (рис. 1.3).

Побудуємо вектор $\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}$. Розкладемо вектор \mathbf{p} на дві складові:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{t} + \mathbf{n}, \\ \mathbf{t} &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

де вектор \mathbf{t} паралельний вектору \mathbf{v} , а вектор \mathbf{n} ортогональний вектору \mathbf{v} .

При обертанні вектор \mathbf{t} не зміниться, а вектор \mathbf{n} обернеться на кут α у бік вектору

$$\mathbf{b} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{v} \times (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{p}. \quad (1.33)$$

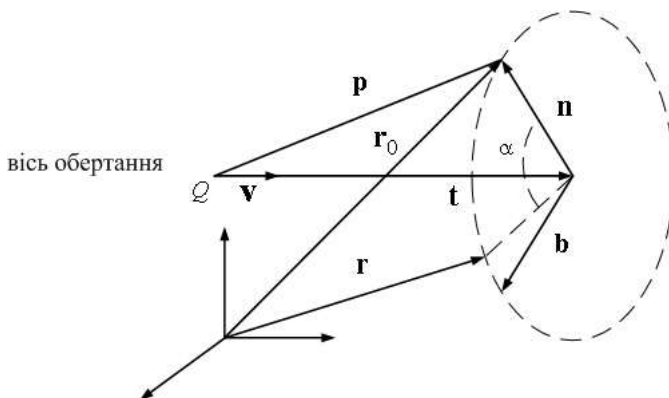


Рисунок 1.3 - Поворот навколо осі

Оскільки вектор \mathbf{v} має одиничну довжину, то вектор \mathbf{b} матиме довжину, рівну довжині вектору \mathbf{n} . Крім того, він ортогональний векторам \mathbf{v} і \mathbf{n} . Після повороту на кут α вектор \mathbf{n} стане рівним вектору $\mathbf{n} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha$. Отже, після повороту дана

точка визначатиметься радіус-вектором

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{q} + \mathbf{t} + \mathbf{n} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha = \\ &= \mathbf{q} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}) \cos \alpha + \mathbf{v} \times \mathbf{p} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1.34)$$

де $\mathbf{p} = \mathbf{r}\mathbf{0} - \mathbf{q}$. Перетворимо вираз

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 v_1 p_1 + v_1 v_2 p_2 + v_1 v_3 p_3 \\ v_2 v_1 p_1 + v_2 v_2 p_2 + v_2 v_3 p_3 \\ v_3 v_1 p_1 + v_3 v_2 p_2 + v_3 v_3 p_3 \end{bmatrix} = (\mathbf{v}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}. \quad (1.35)$$

З (1.35) вираз (1.34) матиме вигляд

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + (\mathbf{v}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} + \cos \alpha (\mathbf{E} - \mathbf{v}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} + \sin \alpha \mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}\mathbf{0} - \mathbf{q}). \quad (1.36)$$

Матриця повороту визначається рівністю

$$\mathbf{A} = (1 - \cos \alpha) \mathbf{v}\mathbf{v} + \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{v} \times \mathbf{p}, \quad (1.37)$$

де

$$\mathbf{v}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3 v_3 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} \times \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Матриця \mathbf{A} є ортогональною. При транспонуванні матриці \mathbf{A} зміниться тільки знак перед останньою складовою, що відповідає повороту точки на кут $-\alpha$.

1.3.3. Масштабування у просторі

Розглянемо масштабування проєкцій на координатні осі відстані до точки $\mathbf{r}\mathbf{0}$ щодо деякої іншої точки Q , що залишається нерухомою після масштабування. Хай \mathbf{q} є радіус-вектор точки Q . У загальному випадку при масштабуванні проєкції на координатні осі вектору $\mathbf{p} = \mathbf{r}\mathbf{0} - \mathbf{q}$ можуть змінюватися у різну кількість разів, тобто масштабування може бути ортотропним. Хай проєкція вектору \mathbf{p} на орт \mathbf{e}_1 при масштабуванні збільшується в m_1 разів, проєкція вектору \mathbf{p} на орт \mathbf{e}_2 збільшується в m_2 разів, проєкція

вектору \mathbf{p} на орт \mathbf{e}_3 збільшується в m_3 разів. Тоді положення даної точки після модифікації описуватиметься радіус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \mathbf{q} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{q}), \quad (1.39)$$

де \mathbf{A} - матриця масштабування.

1.4. Однорідні координати

Розглянуті модифікації повороту (1.36) і масштабування (1.39) радіус-векторе описуються формулами, що мають однаковий вигляд:

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{q}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_0 + (\mathbf{q} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_0 + \mathbf{t}, \quad (1.40)$$

де $\mathbf{t} = \mathbf{q} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}$ – перетворений вектор зсуву.

Зсув (1.31) точки описується цією ж формулою з одиничною матрицею \mathbf{A} і вектором \mathbf{t} , рівним вектору зсуву. Аналогічний вигляд має перетворення координат точки (1.10). Перетворенням координат і модифікаціям точки можна надати єдиний простий вигляд

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{R}_0. \quad (1.41)$$

Для цього потрібно збільшити розмірність векторів і матриць на одиницю. Вектор, доповнений ще однією компонентою, називається розширеним вектором. Компоненти розширеного вектору називаються однорідними координатами.

Представимо кожен радіус-вектор в розширеному вигляді

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad 1]^T. \quad (1.42)$$

Матриця \mathbf{A}_t є матрицею \mathbf{A} , окаймованою знизу нулями, а справа - вектором зсуву \mathbf{t} у розширеному вигляді

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

Індекс матриці \mathbf{A}_t свідчить про те, що вона є розширеною і включає вектор зсуву \mathbf{t} . Для перетворень (1.40) використовуватимемо запис

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}_0 \cdot (\mathbf{R}_0 - \mathbf{Q}) = \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{R}_0 \quad (1.44)$$

вважаючи, що розширена матриця \mathbf{A}_t включає перетворення по матриці \mathbf{A} і зсуву за вектором $\mathbf{t} = \mathbf{q} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}$. Розширений вектор \mathbf{Q} описує точку, що залишається нерухомою при перетворенні.

В деяких випадках, наприклад для побудови раціональних кривих і поверхонь, разом з координатами для точок необхідний додатковий параметр - так звана вага (значущість) точки. Цей параметр точки в обчисленнях перетворюється так само, як і координати, тому його вважають за додаткову координату. За наявності у точки додаткової координати w запис її радіус-вектору в однорідних координатах має вигляд

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wr_1 \\ wr_2 \\ wr_3 \\ w \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} w\mathbf{r} \\ w \end{bmatrix} \equiv [w\mathbf{r} \quad w]^T. \quad (1.45)$$

При використанні однорідних координат обчислення проводяться для однорідних компонент $R_i, i = 1, 2, 3, 4$ без виділення декартових координат. Декартові координати точки отримують на кінцевому етапі обчислень:

$$r_1 = R_1/R_4, \quad r_2 = R_2/R_4, \quad r_3 = R_3/R_4. \quad (1.46)$$

Використання однорідних координат виявляється корисним і там, де додаткова компонента відсутня. У цьому випадку її вважають рівній одиниці.

1.5. Геометрія кривих ліній

Кривою лінією або просто кривою називатимемо геометричне місце точок, координати яких описуються безперервними і однозначними функціями $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$ параметра t , що набуває значень на відрізку $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$. У декартовій прямокутній системі координат $Oe_1e_2e_3$ криву можна описати радіус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 r_i(t) \mathbf{e}_i, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}. \quad (1.47)$$

Представлення кривої у вигляді (1.47) називається параметричним. Далі передбачається, що координатні функції $r_i(t)$ мають безперервні похідні до будь-якого порядку, який нам буде потрібний. Точку кривої $\mathbf{r}(t)$ називають *звичайною*, якщо в цій точці не перетворюється в нуль довжина вектору першої похідної за параметром $\mathbf{r}' = d\mathbf{r}/dt$. Інакше точка кривої називається *особливою*.

Положення точки кривої залежить від параметру t , який є її внутрішньою координатою. Параметр t своїми значеннями однозначно визначає точки кривої. Але оскільки геометрично він нічим не пов'язаний з кривою, то для неї можна використовувати іншу параметризацію. Для цього досить ввести новий параметр v , який пов'язаний з параметром t функціональною залежністю

$$t = t(v), \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max}, \quad (1.48)$$

де $t_{\min} = t(v_{\min})$, $t_{\max} = t(v_{\max})$.

Припускаємо при цьому, що функція $t(v)$ є взаємно однозначною і монотонно зростаючою. Коли параметр v пробігає свою область зміни від v_{\min} до v_{\max} , параметр t пробігає свою область зміни від t_{\min} до t_{\max} . Крива, виражена через параметр v , матиме вигляд

$$\mathbf{r}(v) = \mathbf{r}[t(v)], \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max}, \quad (1.49)$$

При цьому форма кривої залишиться колишньою. Як параметр t , так і параметр v однаково підходять для характеристики точки даної кривої. Використовують цю властивість кривих для

узгодження параметричних довжин кривих. Хай є дві криві: перша $\mathbf{a}(t)$, $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$, друга $\mathbf{c}(v)$, $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$, і необхідно, щоб параметричні довжини кривих були однаковими. Змінимо параметризацію другої кривої так, щоб межі зміни її параметрів збігалися з межами першої кривої. Для цього для опису другої кривої введемо параметр t , зв'язаний параметром v залежністю

$$v(t) = v_{\min} \frac{t_{\max} - t}{t_{\max} - t_{\min}} + v_{\max} \frac{t - t_{\min}}{t_{\max} - t_{\min}}. \quad (1.50)$$

Друга крива тепер матиме вигляд $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t) = \mathbf{c}[v(t)]$, $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$. В окремому випадку параметром кривої може служити довжина її дуги, відлічувана від початкової точки. У загальному випадку параметр t , як будь-яка координатна система, може бути визначений зручним для вирішення способом.

У декартовій прямокутній системі координат похідні векторної функції n -го порядку по її параметру мають вигляд:

$$\mathbf{r}^{(n)} \equiv \frac{d^n \mathbf{r}}{dt^n} = \sum_{i=1}^3 \frac{d^n r_i(t)}{dt^n} \mathbf{e}_i. \quad (1.51)$$

Похідна $\mathbf{r}'(t)$ кривої $\mathbf{r}(t)$ є вектор, направлений по дотичній до кривої в точці, визначуваній параметром t . Відмітимо, що похідна завжди направлена у бік зростання параметру. Знаючи першу похідну радіус-вектору кривої, можна обчислити довжину кривої. Довжина кривої дорівнює межі, до якої прямує довжина ламаної, вписаної в криву. Таким чином, довжина кривої дорівнює інтегралу

$$s = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} dt. \quad (1.52)$$

1.5.1. Натуральна параметризація кривої

Довжина вектору похідної залежить від способу параметризації кривої. Існує спосіб параметризації, за яким довжина вектору похідної дорівнює одиниці. Для цього використовується параметризація, геометрично пов'язана з кривою,

а саме: за параметр береться довжина дуги кривої, відлічувана від деякої її точки (наприклад, початкової). Дійсно, у цьому випадку довжина хорди прямує до довжини дуги Δt , а довжина вектору \mathbf{r}' прямує до одиниці, коли t прямує до нуля. Векторна залежність

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad (1.53)$$

де s - довжина дуги, називається рівнянням кривої з натуральною параметризацією.

Натуральна параметризація зручна в теоретичних дослідженнях, оскільки вона спрощує формули. З практичної точки зору вона не завжди зручна, вимагає знання довжини дуги.

1.5.2. Супроводжуючий тригранник

У кожній точці кривої можна побудувати площину, перпендикулярну до її першої похідної. Така площина називається *нормальною площиною кривої*. Площина, в якій лежать і перша похідна кривої і її друга похідна, називається *дотичною площиною*. Якщо друга похідна кривої паралельна першій похідній або її довжина дорівнює нулю, то як дотичну площину можна узяти будь-яку площину, в якій лежить перша похідна кривої. Точка кривої, в якій вектори першої і другої похідних кривої колінеарні, називається точкою розпрямлення. Точки розпрямлення не залежать від способу параметризації кривої. Назва дотичної площини обумовлена тим, що вона проходить через задану точку кривої з найвищим порядком торкання, і її можна визначити як граничне положення площини, побудованої за трьома

нескінченно близькими точками кривої. Площина, перпендикулярна нормальній і дотичній площинам, називається випрямляючою площиною (рис. 1.4).

Одиничний вектор, направлений уздовж першої похідної кривої, називається *дотичним вектором кривої* в даній точці. Одиничний вектор, направлений уздовж лінії перетину нормальної і дотичної площини і направлений у бік другої похідної (у бік увігнутості кривої), називається *головною нормаллю кривої* в даній точці. Одиничний вектор, що направлений уздовж лінії перетину нормальної випрямляючої площини і створюючий з дотичним і нормальним векторами праву трійку векторів, називається

бінормаллю кривої в даній точці.

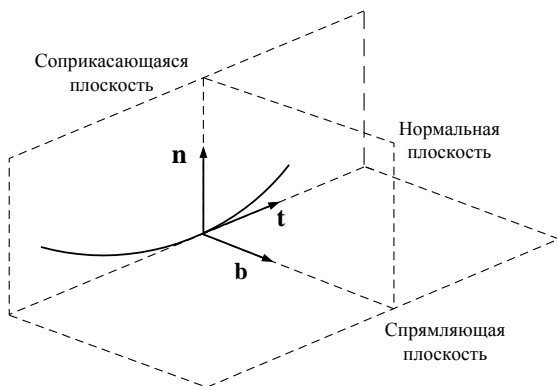


Рисунок 1.4 –
Супроводжувачий
тригранник кривої

Таким чином, з кожною точкою кривої зв'язані три взаємно перпендикулярні площини: нормальна, дотична і випрямляюча, а також три взаємно ортогональних вектори одиничної довжини: дотичний \mathbf{t} , нормаль \mathbf{n} і бінормаль $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$.

Сукупність трьох вказаних площин і трьох векторів \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} називається супроводжувачим тригранником кривої.

Трійка векторів \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} виражається через похідні векторної функції кривої і зв'язана співвідношеннями:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}, \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}. \quad (1.54)$$

1.5.3. Формули Френе-Серре

Припустимо, що нам відомо рівняння кривої з натуральною параметризацією (1.53). У цьому випадку

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (1.55)$$

З того, що довжина першої похідної дорівнює одиниці і не змінна кривої, слідує

$$\frac{d(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})}{ds} = 2\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 2\mathbf{t} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0, \quad (1.56)$$

тобто вектори першої і другої похідної ортогональні. Отже, друга

похідна кривої з натуральною параметризацією по головній нормалі:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = k\mathbf{n}. \quad (1.57)$$

Коефіцієнт k називається кривизною кривої лінії. Нижче ми покажемо, що зворотна до нею величина дорівнює радіусу кола, дотичного з кривою в даній точці. Бінормаль за визначенням ортогональна дотичному вектору і головній нормалі. З цього виходить, що

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{b} \cdot \mathbf{t})}{ds} &= \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} + k\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0, \\ \frac{d(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})}{ds} &= 2\mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Таким чином, вектор $d\mathbf{b}/ds$ ортогональний векторам \mathbf{t} і \mathbf{b} і, отже, паралельний головній нормалі. Це прийнято записувати у вигляді

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\chi\mathbf{n}. \quad (1.59)$$

Коефіцієнт χ називається крученням кривої лінії. Рівність (1.57) і (1.59) визначають похідні ортів \mathbf{t} і \mathbf{b} по довжині дуги. Знайдемо похідну нормалі по довжині дуги

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \frac{d(\mathbf{b} \times \mathbf{t})}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \\ &= -\chi\mathbf{n} \times \mathbf{t} + k\mathbf{b} \times \mathbf{n} = \chi\mathbf{b} - k\mathbf{t}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Диференціальні залежності для векторів \mathbf{t} , \mathbf{n} і \mathbf{b} :

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \chi\mathbf{b} - k\mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\chi\mathbf{n}, \quad (1.61)$$

відомі як формули Френе-Серре. Вони виражають похідні векторів супроводжуючого тригранника у вигляді розкладання за саме цими векторами. Використовуючи (1.55)

і формули Френе-Серре, виразимо вектори \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , кривизну k і кручення χ кривої через похідні радіус-вектору кривої по її довжині дуги таким чином:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{k} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \quad \mathbf{b} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{1}{k} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2},$$

$$k = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|, \quad \chi = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right) \cdot \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}. \quad (1.62)$$

Величина $\rho = 1/k$ називається радіусом кривизни кривої.

Для довільної кривої її кривизна k і кручення χ є функціями параметру t .

Пояснимо, чому коефіцієнт χ називають крученням кривої. Побудуємо в деякій точці кривий супроводжуючий тригранник і подивимося, як він поводитиметься при русі уподовж кривої. З (1.61) отримаємо, що при збільшенні параметру на невелику величину Δt дотичний вектор \mathbf{t} обернеться у бік головної нормалі \mathbf{n} на кут k , а бінормаль \mathbf{b} обернеться у бік, протилежний головній нормалі \mathbf{n} , на кут χ (рис. 1.5).

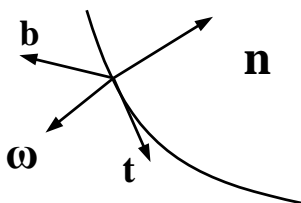


Рисунок 1.5 - Вектор Дарбу

Якщо спостерігати цей процес, «сидячи на кінчику вектору \mathbf{t} », побачимо, що головна нормаль \mathbf{n} та площина, що дотикається, обернулися у бік бінормалі \mathbf{b} на кут χ . Тепер представимо, що точка рухається по кривій, проходячі одиницю довжини її дуги ха одиницю часу. У цьому випадку

кутова швидкість обертання супроводжуючого тригранника навколо дотичного вектору дорівнюватиме крученню кривої χ . Якщо кручення $\chi = 0$, то це плоска крива. Справедливе і зворотнє твердження. Якщо кручення кривої дорівнює нулю, то дотична площина у всіх точках кривої одна й та ж, усі бінормалі паралельні, а крива є плоскою.

Повний вектор кутової швидкості обертання супроводжуючого тригранника по відношенню до шляху по кривій, називається вектором Дарбу. Він рівний

$$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{o} \mathbf{b} + \chi \mathbf{t}. \quad (1.63)$$

Вектор Дарбу додає механічний сенс формулам Френе-Серре (1.61), з використанням якого останні мають вигляд

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}. \quad (1.64)$$

1.5.4. *Натуральні рівняння кривої*

Кривизна k і кручення χ повністю характеризують форму кривої, якщо не зважати на її положення і орієнтацію в просторі. Вони також є певними функціями довжини дуги як параметру

$$k = k(s) > 0, \quad \chi = \chi(s). \quad (1.65)$$

Оскільки довжина дуги, кривизна і кручення не залежать від способу параметризації і від вибору координат в просторі, то і функції $k(s)$ і $\chi(s)$ також від цього вибору не залежать. Рівняння (1.65) називаються натуральними рівняннями кривої. Якщо дві криві мають однакові натуральні рівняння, то вони ідентичні і відрізняються тільки положенням і орієнтацією у просторі. Функції $s(t)$, $k(t)$ і $\chi(t)$ однозначно визначають криву з точністю до положення і орієнтації у просторі.

Як правило, параметризація кривої не є натуральною. Визначення ортів \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} і коефіцієнтів k і χ для довільної параметризації наведено в [1].

1.6. Геометрія двомірних кривих

Окрім просторових ліній при моделюванні практичне значення мають двомірні криві на \mathbb{R}^3 . Зокрема, двомірним простором служитиме область параметрів поверхонь.

Розглянемо випадок двомірної кривої. Хай на площині визначена декартова прямокутна система координат з початком в точці O і базисними векторами \mathbf{e}_1 і \mathbf{e}_2 . Компоненти двомірних векторів позначатимемо через x і y . Більшість формул для двомірних кривих можна отримати з відповідних формул для просторових кривих, поклавши в них третю координату рівною нулю і опустивши її і всі вектори, що є ортогональними площині

кривої (у їх числі і бінормаль). Радіус-вектор двомірної кривої $\mathbf{r}(t) = [x(t) \ y(t)]^T$ описують виразом

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2. \quad (1.66)$$

Для двомірної кривої $\mathbf{r}(s)$ формули Френе-Серре мають вигляд

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t}, \quad (1.67)$$

де $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ - дотичний вектор кривої; s - довжина дуги кривої.

Кривизна двомірної кривої визначається рівністю

$$k = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|. \quad (1.68)$$

Натуральне рівняння двомірної кривої виражає її кривизну як функцію дуги уподовж кривої і має вигляд $k = k(s)$.

Еволюта і евольвента. Для кожної звичайної точки кривої можна вказати центр кривизни. Геометричне місце центрів кривизни всіх точок даної кривої називають еволютою цієї кривої. Вираз для радіус-вектору еволюти $\mathbf{a}(t)$ отримаємо, додавши до радіус-вектору кривої $\mathbf{r}(t)$ вектор нормалі, що ділиться на кривизну кривої:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{k}\mathbf{n}(t) = \mathbf{r} + \frac{1}{k^2} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}. \quad (1.69)$$

Еволюта в кожній своїй дотикається нормалі до початкової кривої у відповідній . Еволюту можна визначити як криву, що огинає сімейства нормалей.

Початкова крива по відношенню до своєї еволюти є евольвентою (розгорткою). Для кривої $\mathbf{a}(s)$ евольвенту описують радіус-вектором

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{a} - (s - s_0) \frac{d\mathbf{a}}{ds} = \mathbf{a} - (s - s_0) \mathbf{t}, \quad (1.70)$$

де s - довжина дуги кривої $\mathbf{a}(s)$; $s_0 = \text{const}$; \mathbf{t} - дотична до кривої.

Для заданої плоскої кривої можна побудувати безліч

евольвент, залежно від s_0 (або від того, в якій точці кривої прийняти довжину дуги, що дорівнює нулю). На рис. 1.6 показано криву $a(s)$ і її евольвенту.

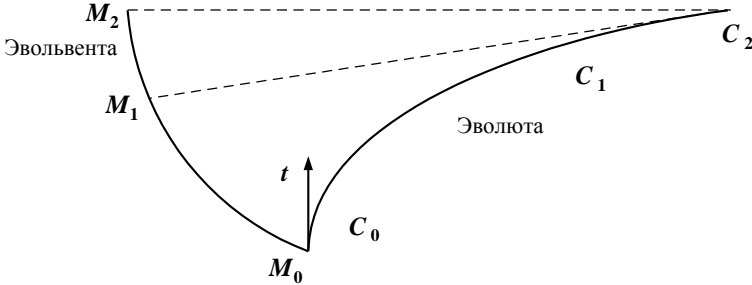


Рисунок 1.6 - Еволюта і евольвента.

Евольвенту будують таким чином. Прийmemo, що довжину дуги кривої $a(s)$ відлічують від точки C_0 . Для отримання точки M евольвенти, яка відповідає деякій точці C_i початкової кривої, побудуємо в точці C_i дотичну і відкладемо на ній з урахуванням знаку відрізок, що дорівнює довжині дуги C_iC_0 , узятій з негативним знаком, якщо значення параметру в точці C_i більше значення параметру в точці C_0 , і узятую з позитивним знаком у іншому випадку. Можна сказати, що евольвента є розгорткою початкової кривої.

1.7. Геометрія поверхонь

Поверхнею називають геометричне місце точок, координати яких описують безперервними і однозначними функціями $r_1(u, v)$, $r_2(u, v)$, $r_3(u, v)$ двох параметрів u і v , що належать безперервній і зв'язній двомірній області Ω .

У декартовій прямокутній системі координат $Oe_1e_2e_3$ поверхню можна описати радіус-вектором

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=1}^3 r_i(u, v)\mathbf{e}_i, \quad u, v \in \Omega. \quad (1.71)$$

Представлення поверхні у вигляді (1.71) називається параметричним. У загальному випадку областю зміни параметрів є частина двомірної площини. У простому випадку областю зміни параметрів поверхні є прямокутник, який можна описати чотирма числами u_{\min} , u_{\max} , v_{\min} , v_{\max} . Область зміни параметрів для простого випадку визначають нерівностями: $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$, $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$.

Таку область зміни параметрів можуть мати дуже багато поверхонь, але для побудови математичної моделі деталі складної форми необхідні поверхні загального вигляду. Два параметри u і v визначають точку поверхні. Якщо ці параметри самі є функціями двох інших параметрів u_0 і v_0 , $u = u(u_0, v_0)$, $v = v(u_0, v_0)$, то поверхню описують радіус-вектором

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{r}[u(u_0, v_0), v(u_0, v_0)], \quad u_0, v_0 \in \Omega_0, \quad (1.72)$$

який залежить від параметрів u_0, v_0 .

Нові параметри u_0, v_0 мають свою область визначення Ω_0 . Форма поверхні не залежить від способу її параметризації. Параметри поверхні є координатами внутрішньої двомірної системи координат, для якої можна вибрати декартову прямокутну систему координат на площині.

Більш детально питання геометрії поверхонь, кривизна ліній на поверхні і тензори поверхонь розглянуті в [1].

1.8. Математична модель геометрії об'єктів

Моделюванням реального або уявного об'єкту є сукупність дій, які дозволяють створювати його математичну модель, редагувати її, змінювати її положення та орієнтацію в просторі і забезпечують взаємодію з іншими моделями. Взаємодією називають виконання різних операцій над моделями: встановлення залежності параметрів однієї моделі від параметрів інших моделей, визначення взаємного положення моделей. Для виконання цих дій необхідна інформація про об'єкт. Геометричну інформацію про об'єкт можна зберігати у вигляді структури даних або обчислювати. Визначимо математичну модель реального або уявного об'єкту як сукупність *даних і функцій*, що дозволяють отримати необхідну інформацію про об'єкт і змінювати його модель необхідним чином. Програмну реалізацію структури даних

і функцій називають класом.

Геометричні об'єкти мають свої дані і свої функції.

Для побудови в структурі її даних досить зберігати три координати і мати функції виконання операцій над радіус-векторами.

Для побудови довільної лінії потрібно знати залежність її радіус-вектору $\mathbf{r}(t)$ від параметру, область зміни параметру і мати функції обчислення похідних радіус-вектору.

Для побудови поверхні потрібно знати залежність її радіус-вектору $\mathbf{r}(u, v)$ від параметрів, область зміни параметрів і мати функції обчислення частинних похідних радіус-вектору.

Тіло описують сукупністю поверхонь, що обмежують його, доповненою інформацією про їх зв'язки одна з одною.

З математичної точки зору всі геометричні об'єкти рівноправні. Для них існує ряд виконуваних функцій. Всі геометричні об'єкти мають бути придатними до модифікацій, повороту, масштабування, симетрії, тому вони повинні мати функції, відповідні цим діям. Крім того, для роботи з геометричним об'єктом потрібні функції створення об'єкту (конструктори), видалення об'єкту (деструктори), функція створення копії об'єкту, функції доступу до даних об'єкту, функції редагування даних об'єкту. Математична модель має бути доповнена функціями, що забезпечують взаємодію об'єктів і виконання над ними різних операцій.

Подальший виклад буде присвячено конкретним моделям і методам їх побудови.

1.9. Системи геометричного моделювання

Процес проектування можна розглядати як поетапну деталізацію форми відповідно до ідей розробника. Програмне забезпечення автоматизованого проектування - це один із засобів, які полегшують цей процес.

Типові програми САД можна розділити на дві групи. Системи автоматизованої розробки креслень допомагають проектувальникові реалізувати свої ідеї в двовимірному просторі. Системи геометричного моделювання дозволяють працювати з формами в тривимірному просторі.

Системи геометричного моделювання були створені для того, щоб подолати проблеми, пов'язані з використанням фізичних моделей у процесі проектування. Ці системи створюють середовище, подібне до того, в якому створюються і змінюються фізичні моделі. Інакше кажучи, в системі геометричного моделювання розробник змінює форму моделі, додає і видаляє її частини, деталізуючи форму візуальної моделі. Візуальна модель може виглядати точно так, як і фізична, але вона є нематеріальною. Тривимірну візуальну модель зберігають в комп'ютері разом зі своїм математичним описом, завдяки чому усувають головний недолік фізичної моделі – необхідність виконання вимірювань для подальшого прототипування або серійного виробництва.

Системи геометричного моделювання поділяються на каркасні, поверхневі, твердотільні і небагатообразні [2].

1.9.1. Системи каркасного моделювання

У системах каркасного моделювання (*wireframe modeling systems*) форму представляють у вигляді набору характеристичних ліній, що характеризують її, і їх кінцевих точок. Лінії і точки використовують для представлення тривимірних об'єктів на екрані, а зміну форми здійснюють шляхом зміни положення і розмірів відрізків і точок. Іншими словами, візуальна модель є каркасним кресленням форми, а відповідним математичним описом є набір рівнянь кривих, координат точок і відомостей про зв'язність кривих і точок. Відомості про зв'язність описують приналежність точок до конкретних кривих, а також перетин кривих одна з одною. Системи каркасного моделювання були популярні у ті часи, коли геометричне моделювання тільки почало зароджуватися. Їх популярність пояснювали тим, що в системах каркасного моделювання створення форм виконували через послідовність простих дій, так що користувачам було досить легко створювати форми самостійно. Проте візуальна модель, яку складають лише одні лінії, може бути неоднозначною. Більш того, відповідний математичний опис не містить відомостей про внутрішні і зовнішні поверхні модельованого об'єкту. Без цих відомостей неможливо розрахувати масу об'єкту, визначити траєкторії переміщення інструменту при обробці об'єкту або створити сітку для

скінченоелементного аналізу, не дивлячись на те, що об'єкт здається тривимірним. Оскільки ці операції є невід'ємною частиною процесу проектування, системи каркасного моделювання були поступово витіснені системами поверхневого і твердотілого моделювання.

1.9.2. Системи поверхневого моделювання

У системах поверхневого моделювання (*surface modeling systems*) математичний опис візуальної моделі включає не тільки відомості про характеристичні лінії і їх кінцеві точки, як в каркасному моделюванні, але і дані про поверхні. При роботі з моделлю, яка відображається на екрані, змінюються рівняння поверхонь, рівняння кривих і координати кінцевих точок. Якщо поверхні не забарвлені і не затушовані, візуальна модель в системі поверхневого моделювання може виглядати точно так, як і в системі каркасного моделювання.

Математичний опис може включати відомості про зв'язність поверхонь, тобто про те, як поверхні з'єднані одна з одною і по яких кривих.

Інколи ці відомості є дуже корисними. Наприклад, програма для формування траєкторії переміщення фрези на верстаті з ЧПУ може вискористовувати цю інформацію для перевірки, чи не зачіпає фреза поверхонь, які примикають до оброблюваної. Проте в математичний опис моделей, що створювали в системах поверхневого моделювання, зазвичай включали рівняння нескінченних поверхонь (або їх параметри) без відомостей про зв'язність.

Прикладами атрибутів, що визначають поверхню, є положення і напрям центральної вісі і радіус циліндру.

Існує три стандартні методи створення поверхонь в системах поверхневого моделювання:

- інтерполяція вхідних ;
- інтерполяція криволінійних сіток;
- трансляція або обертання заданої кривої.

Способи введення для кожного методу можуть залежати від конкретної системи поверхневого моделювання. Проте базовий метод введення для кожної системи легко визначити за

представленням кривих і .

Системи поверхневого моделювання використовують для створення моделей зі складними поверхнями, тому що візуальна модель дозволяє оцінити естетичність проекту, а математичний опис дозволяє побудувати програму для обробки поверхонь деталі на верстаті з ЧПУ.

1.9.3. Системи твердотільного моделювання

Системи твердотільного моделювання (solid modeling systems) призначені для роботи з об'єктами, які складені із замкнутого об'єму або *моноліту (solid)*.

У системах твердотільного моделювання, на відміну від систем каркасного і поверхневого моделювання, не допускають створення наборів поверхонь характеристичних ліній, якщо вони не утворюють замкнутого об'єму. Математичний опис об'єкту, створеного в системі твердотільного моделювання, містить відомості, за якими система може визначити, де знаходиться будь-яка : усередині об'єму, зовні або на його межі. За цими відомостями можна отримати будь-яку інформацію про об'єм тіла, тобто можуть бути розроблені додатки, які працюватимуть з об'єктом на рівні об'єму, а не на рівні поверхні.

Наприклад, можна написати додаток, що формує сітку елементів об'ємного типу за твердотільною моделлю. Можна написати програму для формування всіх траєкторій фрези для верстату з ЧПУ, необхідних для виготовлення деталі із заготовки. Ця програма працюватиме не з окремою , а з об'ємом, що виключить потребу у введенні даних для кожної . Всі ці можливості можуть бути реалізовані у тому випадку, якщо модель створюють у вигляді замкнутого об'єму. Проте створення моделі у вигляді замкнутого об'єму вимагає більшої кількості початкових даних у порівнянні з кількістю даних для математичного опису. Це одна з причин, за якими були розроблені системи моделювання небагатообразних об'єктів. Такі системи моделювання дозволяють працювати з поверхнями і замкнутими об'ємами одночасно.

Якби система твердотільного моделювання вимагала введення всіх даних для повного математичного опису, вона була б складною для користувачів і вони відмовилися б від неї. Процес

деталізації форми не був би схожий на інтуїтивний процес фізичного моделювання, і в результаті вийшло б зовсім не те, на що розраховували творці систем геометричного моделювання. Тому розробники систем твердотілого моделювання прагнуть надати прості і природні функції, аби користувачі могли працювати з об'ємними формами аналогічно роботі з фізичними моделями, не вдаючись до деталей математичного опису.

Функції моделювання, подібні до створення примітивів, Булевих операцій, підняття, побудови фігури обертання, повороту і закруглення, вимагають від користувача зовсім небагато. Про всі деталі математичного опису системи піклуються самі.

Функції моделювання, підтримувані більшістю систем твердотілого моделювання, можуть бути розділені на п'ять основних груп.

До першої групи входять функції, що використовуються для створення простих форм на основі об'ємних заготовок, наявних в програмі, - так звані *функції створення примітивів* (*primitive creation functions*). До цієї ж групи відносяться функції додавання і віднімання об'єму - *булеві оператори* (*Boolean operations*). Функції моделювання з першої групи дозволяють проектувальникові швидко створити форму, близьку до кінцевої форми деталі.

До другої групи відносять функції створення об'ємних тіл шляхом переміщення поверхні. Функція *замітання* (*sweeping*) дозволяє створювати об'ємне тіло трансляцією або обертанням області, яка задана на площині. Побудова тіла обертання з плоскої кривої називається також *гойданням* або *обертальним замітанням* (*swinging*). Задаючи замкнуту плоску область, користувач може вказувати геометричні обмеження або вводити дані про розміри, а не малювати форму вручну. Тут під геометричними обмеженнями розуміють співвідношення між елементами рисунку (перпендикулярність відрізків, дотик дуги кола відрізком і т. п.). У цьому випадку система самостійно побудує точну форму, що задовольняє обмеженням. Зміна геометричних обмежень або розмірів дасть іншу плоску область і інше об'ємне тіло. Такий підхід називають *параметричним моделюванням*, оскільки зміна параметрів дозволяє отримати різні об'єкти. Параметрами можуть бути сталі (константи), що входять до геометричних обмежень, а також розміри. Функція *скінінгу* (*skinning*) створює об'ємне тіло,

натягуючи поверхню на задані поперечні перерізи. Функції цієї групи дозволяють проектувальникові почати моделювання з форми, близької до кінцевого результату, оскільки одних поперечних перерізів цілком достатньо для точного опису кінцевого об'ємного тіла.

До третьої групи входять функції моделювання, призначені головним чином для зміни існуючої форми. Типовими прикладами є функції *округлювання* або *плавного сполучення* (*rounding, blending*) і *підняття* (*lifting*).

До четвертої групи відносять функції, що дозволяють безпосередньо маніпулювати складовими об'ємних тіл, тобто вершинами, ребрами та гранями. Роботу з цими функціями (аналогічними функціям систем поверхневого моделювання) називають *моделюванням меж* (*boundary modeling*).

До цієї групи входять функції, при використанні яких проектувальник може моделювати тверде тіло за допомогою вільних форм. Наприклад, він може давати системі команди типу «зробити отвір необхідного розміру в певному місці» або «зробити фаску необхідного розміру в певному місці». Роботу з такими функціями називають *об'єктно-орієнтованим* (або *характеристичним*) *моделюванням* (*feature-based modeling*). Останнім часом функціям п'ятої групи приділяють особливу увагу, оскільки модель, побудована з їх допомогою, містить інформацію про процес створення, без якої неможливе автоматичне формування плану технологічного процесу виготовлення деталі. Модель, створена іншими засобами, містить тільки елементарні геометричні відомості про вершини, ребра і грані. Більш детально питання твердотілого моделювання розглянуті в [2].

Питання для самостійного контролю.

1. Розкрийте зміст поняття «геометричні об'єкти».
2. Які є принципи перетворення декартових прямокутних координат?
3. Які є особливості перетворення координат точок у просторі?
4. Представте принципову схему перетворення координат двомірних точок.

5. Які є основні принципи модифікації векторів і точок?
6. Розкрийте зміст поняття «однорідні координати».
7. Які є основні поняття геометрії кривих ліній?
8. Який є геометричний зміст натуральних рівнянь кривих?
9. Які є основні поняття геометрії двовимірних кривих?
10. Які є основні поняття геометрії поверхонь?
11. Які є особливості математичних моделей геометрії об'єктів?
12. Назвіть основні види систем геометричного моделювання.
13. Які є особливості систем каркасного моделювання?
14. Які є особливості систем поверхневого моделювання?
15. Які є особливості систем твердотільного моделювання?

РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ

У даному розділі розглянуто способи побудови ліній. Лініями можна описати окремі геометричні властивості об'єктів. Криві лінії використовують для створення поверхонь і тіл. Лінії описують за допомогою скалярних величин, векторів, чи інших ліній. Лінії можуть бути просторовими і двомірними. Спочатку розглянемо просторові лінії, а потім зупинимося на відмінностях двомірних ліній.

2.1. Математична модель кривих ліній

Хай в просторі задана деяка глобальна декартова прямокутна система координат з базисними векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Описуватимемо просторову лінію векторною функцією

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 r_i(t) \mathbf{e}_i \quad (2.1)$$

скалярного аргументу t , що змінюється в межах $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$. Компоненти $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ радіус-вектору точки кривої $\mathbf{r}(t)$ є однозначними безперервними функціями параметру t . Такий опис ліній називають *параметричним*. Областю зміни параметру кривої є відрізок $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ в одновимірному просторі. Криві можуть бути замкнутими або розімкненими. Для замкнутої кривої $\mathbf{r}[t \pm (t_{\max} - t_{\min})] = \mathbf{r}(t)$.

Двомірну лінію описуватимемо векторною функцією

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i}_1 + y(t) \mathbf{i}_2, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}. \quad (2.2)$$

Двомірні вектори $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ є базисними векторами деякої декартової системи координат двомірного простору. У багатьох випадках двомірні лінії аналогічні просторовим лініям.

У загальному випадку лінію можна представити у вигляді системи двох рівнянь, яким задовольняють координати радіус-вектору точок лінії. Кожне з цих рівнянь можна вважати рівнянням поверхні, тоді система цих рівнянь буде лінією перетину поверхонь. Якщо лінія є плоскою, то одним з рівнянь може служити рівняння площини, а другим - рівняння, що зв'язує

двомірні координати радіус-вектору точок лінії в цій площині. Якщо рівняння площини опустити, то прийдемо до двомірної лінії, яку описують одним рівнянням. Такий опис двомірної лінії називають *неявним*. Опис ліній рівняннями щодо її координат на відміну від параметричного опису не завжди однозначний. Він також не є інваріантним щодо перетворення координат, тобто при переході в іншу систему координат змінюються ті, що описують криву лінію рівняння. Неявний опис ліній використовують у теоретичних дослідженнях. При моделюванні кривих ліній використовуватимемо їх параметричне представлення.

Для побудови математичної моделі кривої лінії потрібно знати залежність її радіус-вектору $\mathbf{r}(t)$ від параметру і області зміни параметру t .

Кожному типу кривої відповідає свій набір даних і свій алгоритм обчислення за ним радіус-вектору, а також своя область визначення параметру кривою. За відомою функціональною залежністю радіус-вектору від параметру кривої визначають всю геометричну інформацію кривої. Для кривої завжди можна виконати заміну параметру і області його зміни.

Роботу з математичною моделлю кривої проводять таким чином. Звертаємося до функцій кривої з деяким значенням параметру і як відповідь отримуємо геометричну інформацію про криву в , що відповідає заданому значенню параметру. Різні функції кривої видають різну інформацію. Для одних функцій значення параметру повинно належати області його визначення, для інших - може виходити за області визначення. Якщо функція допускає вихід значення параметру за область визначення, то вона повинна видавати геометричну інформацію для продовження кривої.

2.2. Аналітичні лінії

Розглянемо лінії, координати радіус-вектору яких можуть бути представлені як аналітичні функції деякого параметру t . Простими з них є конічні перерізи, спіралі і деякі інші лінії, які отримані як траєкторії руху точок механізмів. Багато кривих, що описують аналітичними функціями, є або замкнутими, або необмеженими. Для замкнутих кривих за область визначення

параметру вважатимемо відрізок параметричної вісі, в межах якого крива проходить один цикл. Необмежені криві ми відсікатимемо, вводячи мінімальні і максимальні значення параметрів.

2.2.1. Пряма лінія

Однією з простих ліній є *пряма лінія*. Вона може бути описана точкою \mathbf{p} і вектором \mathbf{a} . Радіус-вектору прямої лінії визначимо залежність

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + t \mathbf{a}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.3)$$

Довжина вектору \mathbf{a} у загальному випадку може бути довільною (але відмінною від нуля). Теоретично областю зміни параметру прямої є вся числова вісь, але на практиці зручно ввести обмеження для граничних значень параметру. В останньому випадку ми отримаємо відрізок прямої лінії.

2.2.2. Відрізок прямої

Іншою простою лінією є *відрізок прямої*. Його можна представити через початкову \mathbf{p}_1 і кінцеву \mathbf{p}_2 точки:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t) \mathbf{p}_1 + t \mathbf{p}_2, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.4)$$

Введемо позначення $v = (1 - t)$, тоді радіус-вектор відрізка описуватимуть формулою

$$\mathbf{r}(t) = v \mathbf{p}_1 + t \mathbf{p}_2; \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq v \leq 1, t + v = 1. \quad (2.5)$$

Величини v і t , на яких помножуються координати точок \mathbf{p}_1 і \mathbf{p}_2 , є *барицентричними координатами*. З використанням барицентричних координат точок \mathbf{p}_1 і \mathbf{p}_2 формула відрізка набуває симетричного вигляду.

2.2.3. Плоскі криві

Опису плоских кривих в просторі можна надати наступний вигляд:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + x(t) \mathbf{i}_x + y(t) \mathbf{i}_y, \quad (2.6)$$

де \mathbf{p} - деяка точка прив'язки характерної точки кривої; \mathbf{i}_x і \mathbf{i}_y - неколінеарні вектори; $x(t)$ і $y(t)$ - скалярні функції.

Аналогічний вигляд $\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + x(t)\mathbf{i}_x + y(t)\mathbf{i}_y$ має опис цих кривих у двомірному просторі. Різниця полягає в тому, що у двомірному просторі лінії описують точками і векторами, які мають дві компоненти, а в тривимірному просторі – три компоненти. Точка \mathbf{p} і вектори \mathbf{i}_x і \mathbf{i}_y вибрані так, що скалярні функції $x(t)$ і $y(t)$ мають канонічний вигляд. Канонічний вигляд прийме і співвідношення, що зв'яже ці скалярні функції.

Вектори \mathbf{i}_x і \mathbf{i}_y разом з вектором $\mathbf{i}_z = \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y$ є базисом місцевої декартової системи координат, в якій крива має канонічний вигляд. Їх завжди можна представити у вигляді розкладання по базису \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 глобальної декартової системи координат:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_x &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{i}_y &= a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{i}_z &= a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Точка \mathbf{p} є початком цієї місцевої декартової системи координат. Вона також може бути представлена у вигляді розкладання по базису \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 глобальної декартової системи координат:

$$\mathbf{p} = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3.\tag{2.8}$$

Таким чином, структура даних аналітичних ліній містить опис місцевої системи у вигляді початкової точки і трьох ортів. При зміні положення і орієнтації так само описаної плоскої кривої змінюються компоненти точки \mathbf{p} і векторів \mathbf{i}_x і \mathbf{i}_y , а скалярні функції $x(t)$ і $y(t)$ залишаються незмінними, зберігаючи канонічний вигляд.

2.2.4. Коло

Коло можна описати, задаючи його радіус r , положення центру \mathbf{p} і два взаємно ортогональних вектори одиничної довжини \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , що визначають положення площини кола:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + r\cos t\mathbf{i}_x + r\sin t\mathbf{i}_y, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.\tag{2.9}$$

Коло є плоскою кривою. Колом є геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від центру \mathbf{p} . Його неявний опис за допомогою координатних функцій $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \sin t$ на площині має вигляд

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (2.10)$$

2.2.5. Еліпс

Еліпс у викладеній концепції (рис. 2.1) може бути описаний радіус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + a \cos t \mathbf{i}_x + b \sin t \mathbf{i}_y, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (2.11)$$

де a і b - піввісь еліпсу.

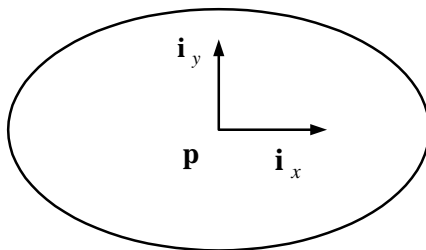


Рисунок 2.1 - Еліпс

Скалярні функції $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$ еліпсу зв'язані рівнянням

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad (2.12)$$

Еліпсом є геометричне місце точок на площині, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок \mathbf{f}_1 і \mathbf{f}_2 цієї площини званих фокусами, є постійна величина, рівна $\max(2a, 2b)$. Хай $a > b$, тоді радіус-вектори фокусів рівні

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{p} - \sqrt{a^2 - b^2} \mathbf{i}_x, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{p} + \sqrt{a^2 - b^2} \mathbf{i}_x. \quad (2.13)$$

Коло та еліпс є замкнутими лініями.

2.2.6. Гіпербола

Гіпербола (рис. 2.2) може бути описана радіус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + a \operatorname{ch} t \mathbf{i}_x + b \operatorname{sh} t \mathbf{i}_y, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}. \quad (2.14)$$

Радіус-вектор (2.14) описує тільки одну гілку гіперболи. Друга гілка гіперболи може бути описана радіус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} - a \operatorname{ch} t \mathbf{i}_x + b \operatorname{sh} t \mathbf{i}_y, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}. \quad (2.15)$$

Скалярні функції $x(t) = a \operatorname{ch} t$, $y(t) = b \operatorname{sh} t$ гіперболи зв'язані рівняннями

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad (2.16)$$

Даному рівнянню задовольняють і функції $x(t) = \pm a \operatorname{ch} t$, $y(t) = \pm b \operatorname{sh} t$.

Гіпербола являє собою геометричне місце точок на площині, для яких абсолютна величина різниці відстаней до двох фіксованих точок \mathbf{f}_1 і \mathbf{f}_2 цієї площини, що називають фокусами, є постійна величина, рівна $2a$. Радіус-вектори фокусів рівні

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{p} - \sqrt{a^2 + b^2} \mathbf{i}_x, \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{p} + \sqrt{a^2 + b^2} \mathbf{i}_x. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Гілка гіперболи, що описана функцією (2.14), представлена на рис. 2.2.

2.2.7. Парабола

Парабола (рис. 2.3) може бути описана радіус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + \frac{1}{2} p t^2 \mathbf{i}_x + p t \mathbf{i}_y, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}. \quad (2.18)$$

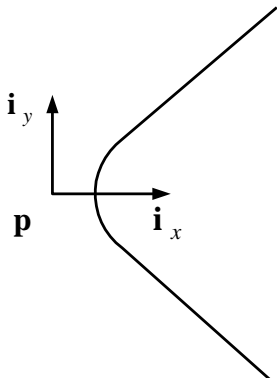


Рисунок 2.2 - Гілка гіперболи

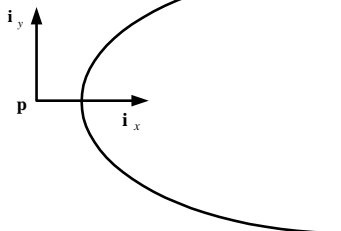


Рисунок 2.3 - Парабола

Скалярні функції $x(t) = \frac{1}{2}pt^2$, $y(t) = pt$ параболи зв'язані рівнянням

$$2px - y^2 = 0. \quad (2.19)$$

Парабола представляє геометричне місце точок на площині, для яких відстань до фіксованої точки \mathbf{f} цієї площини, що називають фокусом, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої $\mathbf{d}(w)$, що називають *директрисою*. Радіус-вектори фокусу та директриси рівні

$$\mathbf{f} = \mathbf{p} + \frac{p}{2}\mathbf{i}_x, \quad \mathbf{d}(w) = \mathbf{p} - \frac{p}{2}\mathbf{i}_x + w\mathbf{i}_x. \quad (2.20)$$

Величину $f = p/2$ називають фокусною відстанню.

2.2.8. Дуга кола або еліпсу

Дугу кола можна описати, задавши його радіус r , положення центру \mathbf{p} , два взаємно ортогональних вектори одиничної довжини $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y$, що визначають місцеву систему координат, початковий кут α_0 , кут дуги α та напрямок руху sign :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + r \cos(\alpha_0 + t \text{sign}) \mathbf{i}_x + r \sin(\alpha_0 + t \text{sign}) \mathbf{i}_y, \quad (2.21)$$

$$0 \leq t \leq \alpha$$

де $\text{sign} = +1$, якщо точку переміщувати по дузі проти годинникової стрілки при погляді назустріч вектору $\mathbf{i}_z = \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y$, і $\text{sign} = -1$, якщо точку переміщувати по дузі за годинниковою стрілкою при погляді назустріч вектору $\mathbf{i}_z = \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y$ (у двовірному випадку при погляді на площину).

Аналогічною формулою можна описати дуга еліпсу:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + a \cos(\alpha_0 + t \text{sign}) \mathbf{i}_x + b \sin(\alpha_0 + t \text{sign}) \mathbf{i}_y, \quad (2.22)$$

$$0 \leq t \leq \alpha$$

де a і b - півосі еліпсу.

2.2.9. Циліндрична спіраль

Циліндрична спіраль також є аналітичною кривою, але неплоскою. Її можна описати положенням початку вісі спіралі \mathbf{p} , трьома взаємно ортогональними векторами одиничної довжини \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z , радіусом r , кроком h і параметричною довжиною t_{\max} :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + r \cos t \mathbf{i}_x + r \sin t \mathbf{i}_y + h \frac{t}{2\pi} \mathbf{i}_z, \quad 0 \leq t \leq t_{\max}. \quad (2.23)$$

Циліндричну спіраль наведено на рис. 2.4. Ліву спіраль можна одержати шляхом присвоєння негативного значення h .

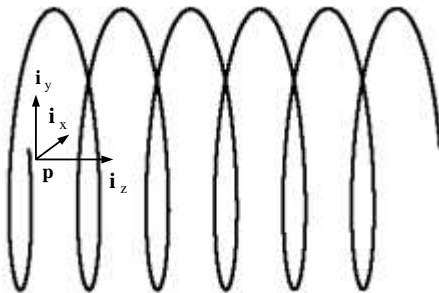


Рисунок 2.4 - Циліндрична спіраль

Похідні аналітичних ліній можна знайти диференціюванням компонентів радіус-вектору за параметром. Розглянуті лінії можна задавати трохи іншим способом. Наприклад, радіус можна замінити довжиною вектору (уже не одиничною), але в певних випадках зручніше мати дані про напрямок і довжину окремо.

Можна побудувати досить велику кількість інших плоских та просторових кривих, координати радіус-вектору яких описують аналітичними функціями.

2.3. Криві другого порядку

Еліпс, параболу та гіперболу називають конічними перерізами, тому що їх можна отримати в результаті перерізу конічної поверхні із площиною, за умови, що площина не проходить через вершину конусу. Якщо кут площини з віссю конусу більше кута твірної конусу з його віссю, то одержимо еліпс. Якщо кут площини з віссю конусу менше кута твірної конусу з його віссю, то одержимо гіперболу.

Якщо зазначені кути рівні між собою, то одержимо параболу. Конічні перерізи є кривими другого порядку. Вище ми розглянули параметричне представлення конічних перерізів. У деяких випадках, наприклад, при обміні даними, доводиться мати справу з координатними рівняннями для цих кривих. Тому потрібно виконувати перетворення з неявного представлення в параметричне і назад.

Декартові координати x та y на площині кривих другого порядку зв'язані рівнянням другого ступеня

$$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}x + 2c_{23}y + c_{33} = 0, \quad (2.24)$$

де c_{11} , c_{22} , c_{33} , c_{12} , c_{13} , c_{23} - коефіцієнти, що визначають тип кривої, її положення та орієнтацію на площині (хоча б один з коефіцієнтів c_{11} , c_{22} , c_{12} не повинен дорівнювати нулю). При переміщенні або повороті кривої другого порядку коефіцієнти c_{11} , c_{22} , c_{33} , c_{12} , c_{13} , c_{23} не залишаються незмінними. Шляхом повороту і переміщення початку системи координат рівняння (2.24) можна перетворити до найбільш простого виду, який називають канонічним. Величини

$$I_1 = c_{11} + c_{22}, \quad I_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{12}, \quad I_3 = c_{12} \begin{matrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{matrix} \quad (2.25)$$

є інваріантами лінії другого порядку (2.24) відносно перетворень декартової системи координат.

Тип лінії другого порядку і її положення в просторі визначають значеннями інваріантів I_1 , I_2 , I_3 . У розширеному матричному записі рівняння кривої другого порядку (2.24) має вигляд

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{C}_c \cdot \mathbf{R} = 0, \quad (2.26)$$

де використано розширений вектор \mathbf{R} і розширену матрицю \mathbf{C}_c

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Наведемо класифікацію ліній другого порядку. Тип лінії визначають знаком інваріанту I_2 :

- еліптичний тип, якщо $I_2 > 0$;
- параболічний тип, якщо $I_2 = 0$;
- гіперболічний тип, якщо $I_2 < 0$.

Для того, щоб лінії другого порядку не вироджувалися у прямі, необхідно, щоб $I_3 \neq 0$. Якщо лінія має еліптичний тип і $(I_3/I_1) > 0$, то рівнянню (2.24) не задовольняє жодна точка площини, а рівняння називають рівнянням уявного еліпсу. Еліпс утворюється при $I_2 > 0$, $I_3 \neq 0$ та $(I_3/I_1) > 0$, гіпербола - при $I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$, парабола - при $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$.

Кожна крива другого порядку (2.24) у деякій системі координат приймає канонічний вид. Цю систему називають головною центральною (якщо лінія має центр) системою координат. Крива має центр, якщо $I_2 \neq 0$. Двомірні координати x_0 , y_0 центру системи координат, у якій крива другого порядку прийме канонічний вид, знаходять із системи рівнянь

$$\begin{aligned} c_{11}x_0 + c_{12}y_0 + c_{13} &= 0, \\ c_{12}x_0 + c_{22}y_0 + c_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

і прирівнюють

$$x_0 = -\frac{1}{I_2} \begin{vmatrix} c_{13} & c_{12} \\ c_{23} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad y_0 = -\frac{1}{I_2} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{12} & c_{23} \end{vmatrix}. \quad (2.29)$$

Кут повороту φ головної системи координат відносно початкової задовольняє системі рівнянь

$$\begin{aligned} (c_{11} - \lambda)\cos\varphi + c_{12}\sin\varphi &= 0, \\ c_{12}\cos\varphi + (c_{22} - \lambda)\sin\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

де λ - корінь характеристичного рівняння.

Якщо корені характеристичного рівняння різні, то система (2.28) має одне незалежне рівняння. Виключимо λ з рівнянь (2.30) і одержимо

$$c_{12}\operatorname{tg}\varphi + c_{11} = c_{12}\operatorname{ctg}\varphi + c_{22}. \quad (2.31)$$

Якщо $c_{12} \neq 0$ або $c_{11} \neq c_{22}$, то можна визначити кут повороту φ головної системи координат. Його визначають рівністю

$$\operatorname{ctg}(2\varphi) = \frac{c_{11} - c_{22}}{2c_{12}}. \quad (2.32)$$

При переході до головної центральної системи координат рівняння кривої другого порядку набуває канонічний вид:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{для еліпсу,} \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{для гіперболи,} \quad (2.34)$$

$$2px - y^2 = 0 \quad \text{для параболи.} \quad (2.35)$$

Наведені формули дозволяють побудувати параметричні залежності для кривих другого порядку за їх координатними

рівняннями. Для переходу від параметричного представлення до координатних рівнянь потрібно знати канонічне рівняння $f(x, y) = 0$, яким зв'язані координатні функції $x(t)$, $y(t)$ кривої. Нехай на площині, у якій лежить крива, задано місцеву двомірну декартову прямокутну систему координат і деяку глобальну двомірну декартову прямокутну систему координат. Нехай положення місцевої декартової системи координат описують центром у точці \mathbf{q} і ортами \mathbf{j}_1 і \mathbf{j}_2 , що задані в глобальній двомірній системі координат виразами

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{j}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{j}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2,\end{aligned}\tag{2.36}$$

де $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ - базис глобальної двомірної системи координат.

Місцеві координати x, y пов'язані із глобальними двомірними координатами p_1, p_2 рівняннями:

$$\begin{aligned}x &= (p_1 - q_1) \cos \varphi + (p_2 - q_2) \sin \varphi, \\ y &= -(p_1 - q_1) \sin \varphi + (p_2 - q_2) \cos \varphi.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Для отримання рівняння $F(p_1, p_2) = 0$, що зв'яже глобальні координати, варто підставляти у рівняння $f(x, y) = 0$ вираз (2.37) для канонічних координат.

2.4. Сплайни

Під сплайном (від англ. spline - планка, рейка) зазвичай розуміють агрегатну функцію, що збігається з функціями більш простої природи на кожному елементі розбивки своєї області визначення.

Функції, подібні тим, що зараз називають сплайнами, були відомі математикам давно, починаючи як мінімум з Ейлера, але інтенсивно вивчати їх почали тільки із середини XX століття. В 1946 році Ісаак Шенберг вперше вжив цей термін як позначення класу поліноміальних сплайнів. До 1960 року сплайни були переважно інструментом теоретичних досліджень, вони часто з'являлися як рішення різних екстремальних і варіаційних задач, особливо в теорії наближень. Після 1960 року з розвитком

обчислювальної техніки сплайнні почали використовувати у комп'ютерній графіці і моделюванні.

У багатьох практичних завданнях аналітична формула лінії не відома, але потрібно, наприклад, щоб крива проходила через задані точки, мала певний ступінь гладкості або в певних точках – задані похідні. Розглянемо такі криві.

Великий клас ліній можна побудувати по сукупності точок. Такі лінії називають точечно-заданими. Це ламана лінія і різні сплайни. Ми розглянемо кубічний сплайн, сплайн у формі Лагранжа, сплайн у формі Ньютона та сплайн Ерміта.

Завдачу ставлять таким чином: є сукупність точок у просторі, радіус-вектори яких рівні \mathbf{p}_i , де $i = 0, 1, 2, \dots, n$ – номери точок; потрібно побудувати лінію, радіус-вектор якої при значеннях параметру t_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ дорівнював би \mathbf{p}_i . Іншими словами – необхідно побудувати інтерполяційну криву.

Точки \mathbf{p}_i , які визначають лінію і є її внутрішніми даними, будемо називати *характеристичними точками кривої*, точки t_i на числовій вісі будемо називати *вузлами*, а значення параметру t_i – вузловими.

2.4.1. Ламана лінія

Найпростішою точечно-заданою лінією є *ламана лінія*. Вона складається з відрізків, які послідовно з'єднують задані точки.

Значення параметру в кожній наступній точці повинно бути більше значення параметру в попередній точці $t_i < t_{i+1}$. Радіус-вектор ламаної визначають рівністю

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_i(1-w) + \mathbf{p}_{i+1}w, \quad w = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}, \quad t_0 \leq t \leq t_n, \quad (2.38)$$

де $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

Параметр w називають місцевим параметром на ділянці кривої між точками \mathbf{p}_i і \mathbf{p}_{i+1} . Перша похідна ламаної лінії в точках \mathbf{p}_i розривається по довжині і по напрямку. Параметр ламаної лінії змінюється в одномірному просторі. У цьому просторі для визначення параметру t можливо використовувати будь-яку систему координат. Для параметру можна використовувати систему координат, де його значення в точці \mathbf{p}_i дорівнює номеру

точки: $t_i = i$. Таку параметризацію називають рівномірною, а параметрична довжина ламаної в такому випадку дорівнює числу точок мінус один. Приклад ламаної лінії наведено на рис. 2.5.

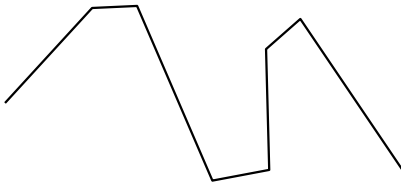


Рисунок 2.5 - Ламана лінія

Ламана може бути замкнутою, у цьому випадку перша характеристична точка одночасно є і останньою. Параметрична довжина замкнутої ламаної лінії дорівнює числу точок, якими вона задана. Ламана має ряд корисних властивостей: її точки легко

обчислювати, легко редагувати (вставити нову точку, видалити або зрушити існуючу), легко розрізати на частини, кожна з яких також буде ламаною лінією.

2.4.2. Сплайн Ерміта

У багатьох практичних завданнях потрібно побудувати плавну криву лінію, що проходить через задані точки. З цією метою будують *сплайни*. Термін «сплайн» для кривих ліній запозичено з назви креслярського інструменту - пружної гнучкої лінійки, що може вигинатися так, щоб проходити через задані точки.

Якщо задано послідовність $m + 1$ точок, через які повинна пройти крива, та похідні її радіус-вектору в цих точках, то за цими даними можна побудувати сплайн Ерміта, який описують поліномом ступеня $2m + 1$. Ми розглянемо окремий випадок сплайну Ерміта для $m = 1$.

Ламану лінію можна розглядати в якості складової кривої, що побудована з відрізків прямої лінії. За аналогією можна побудувати складену кубічну криву зі сплайнів Ерміта третього ступеня, що гладко стикаються між собою. Побудуємо складовий сплайн Ерміта, що проходить через задану послідовність точок і має в цих точках задані похідні. Нехай радіус-вектори цих точок рівні \mathbf{p}_i , вектори похідних кривої у цих точках рівні \mathbf{q}_i , а значення параметру в цих точках рівні t_i ($t_i < t_{i+1}$), де $i = 0, 1, 2, \dots, n$ - номери точок. На ділянці між точками \mathbf{p}_i і \mathbf{p}_{i+1} складовий сплайн Ерміта є

поліномом третього ступеня місцевого параметру w

$$\mathbf{r}_i(w) = \mathbf{a}_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3, \quad w = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}. \quad (2.39)$$

Місцевий параметр w змінюється від 0 до 1. Вектори $\mathbf{a}_j, j = 0, 1, 2, 3$ визначають на границі ділянки кривої

$$\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{r}_i(1) = \mathbf{p}_{i+1}, \quad \mathbf{r}'_i(0) = \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{r}'_i(1) = \mathbf{q}_{i+1}. \quad (2.40)$$

Після рішення цієї системи рівнянь і підстановки значень в (2.40), одержимо залежність радіус-вектору для сплайну Ерміта

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{p}_i(1 - 3w^2 + 2w^3) + \\ &+ \mathbf{p}_{i+1}(3w^2 - 2w^3) + \mathbf{q}_i(w - 2w^2 + w^3) + \mathbf{q}_{i+1}(-w^2 + w^3) = \\ &= \alpha_0(w)\mathbf{p}_i + \alpha_1(w)\mathbf{p}_{i+1} + \beta_0(w)\mathbf{q}_i + \beta_1(w)\mathbf{q}_{i+1}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$w = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad t_0 \leq t \leq t_n,$$

де $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. В (2.41) введено позначення для функцій

$$\begin{aligned} \alpha_0(w) &= 1 - 3w^2 + 2w^3, & \alpha_1(w) &= 3w^2 - 2w^3, \\ \beta_0(w) &= w - 2w^2 + w^3, & \beta_1(w) &= -w^2 + w^3, \end{aligned} \quad (2.42)$$

що задовольняють рівнянням:

$$\begin{aligned} \alpha_0(0) &= 1, & \alpha_0(1) &= 0, & \alpha_1(0) &= 0, & \alpha_1(1) &= 1, \\ \alpha_0'(0) &= 0, & \alpha_0'(1) &= 0, & \alpha_1'(0) &= 0, & \alpha_1'(1) &= 0, \\ \beta_0(0) &= 0, & \beta_0(1) &= 0, & \beta_1(0) &= 0, & \beta_1(1) &= 0, \\ \beta_0'(0) &= 1, & \beta_0'(1) &= 0, & \beta_1'(0) &= 0, & \beta_1'(1) &= 1, \end{aligned} \quad (2.43)$$

де штрих означає диференціювання по w . Якщо точки \mathbf{p}_i розташовані рівномірно, то можна прийняти значення параметру в точках \mathbf{p}_i рівними номерам точок: $t_i = i$. При нерівномірному розташуванні точок \mathbf{p}_i параметричну відстань

$t_{i+1} - t_i$ можна прийняти пропорційною відстані між відповідними точками $|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|$. Складовий сплайн Ерміта може бути замкнутим.

Вище розглянуто випадок, коли для кривої задані похідні в точках. Якщо похідні \mathbf{q}_i невідомі, то їх можна обчислити по одній зі схем.

У першому випадку їх можна прийняти рівними

$$\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}. \quad (2.44)$$

При нерівномірному розташуванні точок даний спосіб визначення похідних \mathbf{q}_i може привести до появи небажаних петель. Для запобігання появи петель використовують іншу схему визначення похідних \mathbf{q}_i . Наприклад, їх можна прийняти рівними

$$\mathbf{q}_i = s_{i+1} \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{s_i + s_{i+1}} + s_i \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i}{s_i + s_{i+1}}, \quad (2.45)$$

де $s_i = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}|$, $s_{i+1} = |\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|$ - відстані між сусідніми точками.

За третьою схемою міняють місцями внески відстаней між сусідніми точками:

$$\mathbf{q}_i = s_i \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{s_i + s_{i+1}} + s_{i+1} \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i}{s_i + s_{i+1}}. \quad (2.46)$$

На рис. 2.6 наведено ламану лінію та складовий сплайн Ерміта, що побудовано даним способом - по характеристичних точках ламаної.

При нерівномірному розташуванні точок даний спосіб визначення похідних \mathbf{q}_i , як і перший спосіб, може привести до появи петель.

Запропоновані схеми не дозволяють одержати похідні радіус-вектору кривої на її краях, якщо вона не замкнута. Похідні на краях можна одержати, виходячи із цілей, які переслідують при побудові кривої. Знайдемо похідні в крайніх точках складової кривої за умови, що в цих точках треті похідні радіуса-вектору

перетворюються на нуль. Для цього обчислимо за (2.46) похідні для відповідних ділянок і підставимо в них відповідні значення параметру. В результаті одержимо

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 &= 2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) - \mathbf{q}_1, \\ \mathbf{q}_n &= 2(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}) - \mathbf{q}_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

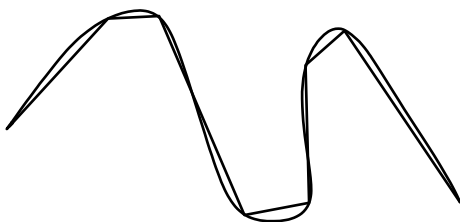


Рисунок 2.6 - Ламана лінія та складовий сплайн Ерміта

Аналогічно можна знайти похідні в крайніх точках складової кривої за інших умов. Такими умовами можуть бути: рівність нулю других похідних на кінцях кривої; рівність похідних радіус-вектору на кінцях заданим значенням. Складовий сплайн Ерміта дає прийнятну апроксимацію за великій щільності точок. Другі похідні в характеристичних точках складеного сплайну Ерміта не зберігають безперервність.

2.4.3. Кубічний сплайн

Побудуємо за заданою сукупністю характеристичних точок сплайн, який би мав безперервними перші та другі похідні радіус-вектору. На кожній ділянці між сусідніми характеристичними точками будемо описувати радіус-вектор кривої кубічним поліномом типу (2.39). Введемо позначення для інших похідних у характеристичних точках $\mathbf{r}''(t_i) = \mathbf{s}_i$. Друга похідна радіус-вектору на ділянці $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ є лінійною функцією параметру t

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{s}_i \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} + \mathbf{s}_{i+1} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}. \quad (2.48)$$

Після дворазового інтегрування одержимо

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}_i \frac{(t_{i+1} - t)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} + \mathbf{s}_{i+1} \frac{(t - t_i)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2. \quad (2.49)$$

Постійні інтегрування \mathbf{c}_1 і \mathbf{c}_2 визначимо з умов на кінцях ділянки $\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{p}_i$ і $\mathbf{r}(t_{i+1}) = \mathbf{p}_{i+1}$. Після обчислень одержимо

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = & \mathbf{s}_i \frac{(t_{i+1} - t)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} + \mathbf{s}_{i+1} \frac{(t - t_i)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} + \\ & + \left(\frac{\mathbf{p}_i}{t_{i+1} - t_i} - \mathbf{s}_i \frac{t_{i+1} - t_i}{6} \right) (t_{i+1} - t) + \left(\frac{\mathbf{p}_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} - \mathbf{s}_{i+1} \frac{t_{i+1} - t_i}{6} \right) (t - t_i). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Вираз (2.50) описує кубічний поліном на відрізку $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ і має дві невідомі величини \mathbf{s}_i і \mathbf{s}_{i+1} . Для їх визначення прирівняємо першу похідну сплайну на правому кінці відрізку $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ першій похідній сплайну на лівому кінці відрізку $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Після диференціювання (2.50) та підстановки $t = t_i$ одержимо

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t_i} = - \frac{(2\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_{i+1})(t_{i+1} - t_i)}{6} + \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i}{t_{i+1} - t_i}. \quad (2.51)$$

Прирівнявши праві частини останніх двох виразів, одержимо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{i-1}(t_i - t_{i-1}) + 2\mathbf{s}_i(t_{i+1} - t_{i-1}) + \mathbf{s}_{i+1}(t_{i+1} - t_i) = \\ = 6 \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i}{t_{i+1} - t_i} - 6 \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Такі рівняння можна скласти для $n - 1$ характеристичних точок (у випадку незамкнутого сплайну). Два відсутніх рівняння визначаються, виходячи з умов на кінцях кривої. Наприклад, якщо аналогічно сплайну (лінійці-інструменту) вважати кінці кривої вільними, то можна прийняти $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_n = 0$. У деяких випадках можна прийняти $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_{n-1}$, тоді на кінцевих відрізках сплайн матиме постійну кривизну. Додаткові умови залежать від фізичних або геометричних умов у кожному конкретному випадку. Якщо

потрібно побудувати замкнуту криву, то ми матимемо рівне число невідомих і рівнянь. Таким чином, невідомі вектори других похідних \mathbf{s}_i у характеристичних точках знайдемо із системи лінійних рівнянь. Матриця цієї системи лінійних рівнянь є трьохдіагональною, що значно спрощує рішення системи. Після обчислення векторів \mathbf{s}_i сплайн описуватиметься формулою

$$\mathbf{r}(t) = (1-w)\mathbf{p}_i + w\mathbf{p}_{i+1} + \left[(-2w+3w^2-w^3)\mathbf{s}_i + (-w+w^3)\mathbf{s}_{i+1} \right] \frac{(t_{i+1}-t_i)}{6}, \quad (2.53)$$

де $w = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

Отриману криву називають *кубічним сплайном*. На відміну від складового сплайну Ерміта для кубічного сплайну зміна положення однієї з характеристичних точок призводить до необхідності перерахування його характеристик.

На рис. 2.7 наведено кубічний сплайн і складовий сплайн Ерміта, які побудовано за тими самими вісьмома точками.

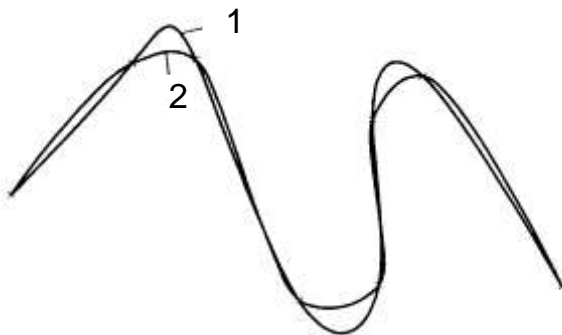


Рисунок 2.7 - Кубічний сплайн (1), сплайн Ерміта (2)

Якщо прийняти, що значення параметру в характеристичних точках дорівнює їх номерам ($t_i = i$), то рівняння (2.52) спроститься та прийме вид:

$$\mathbf{s}_{i-1} + 4\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_{i+1} = 6(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}). \quad (2.54)$$

Така параметризація є рівномірною. Кубічні сплайни широко використовують в задачах інтерполяції. Рівномірна параметризація при побудові інтерполяційного сплайну, що проходить через задані точки, може призвести до необґрунтованих вигинів кривої, якщо точки розташовані нерівномірно. Для запобігання цьому потрібно використовувати параметризацію кубічного сплайну, пропорційну відстані між сусідніми точками. Тобто параметризація повинна відповідати виразу

$$\frac{|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|}{t_{i+1} - t_i} \approx \frac{|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}|}{t_i - t_{i-1}}. \quad (2.55)$$

За аналогією з кубічним сплайном можна побудувати сплайни більш високого ступеня, коли похідні радіус-вектору третього та більш високого порядку безперервні в характеристичних точках. Максимально можливий порядок похідних радіус-вектору, для яких можна зберегти безперервність, дорівнює n при $n+1$ характеристичних точок. Це можна зробити, побудувавши інтерполяційний поліном Лагранжа або Ньютона. Інтерполяційні формули Лагранжа та Ньютона дають той самий поліном при різних способах його обчислення. В обох випадках шукають векторний багаточлен ступеня n виду

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \dots + \mathbf{a}_n t^n, \quad (2.56)$$

який при заданих значеннях параметру t_i приймає задані значення \mathbf{p}_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Для визначення векторів \mathbf{a} , одержимо систему лінійних рівнянь, визначник якої відмінний від нуля, якщо серед точок немає співпадаючих. Сформульоване завдання має єдине рішення.

2.4.4. Сплайн Лагранжа

Інтерполяційна формула Лагранжа є рішенням завдання побудови кривої по заданими точками у вигляді

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^n L_i(t) \mathbf{p}_i, \quad (2.57)$$

де функції $L_i(t)$ рівні 1 при $t = t_i$ і рівні 0 в інших вузлах $t_j, j \neq i$.

Функції $L_i(t)$ будемо шукати у вигляді багаточленів ступеня n , а саме:

$$L_i(t) = \lambda_i (t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_{i-1})(t - t_{i+1}) \dots (t - t_n). \quad (2.58)$$

З умови $L_i(t_i) = 1$ знаходимо

$$\frac{1}{\lambda} = (t_i - t_0)(t_i - t_1) \dots (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1}) \dots (t_i - t_n) \quad (2.59)$$

і, відповідно, одержимо формули для коефіцієнтів Лагранжа

$$L_i(t) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j)}. \quad (2.60)$$

Остаточо, інтерполяційний поліном Лагранжа має вигляд

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j)} \mathbf{p}_i, \quad t_0 \leq t \leq t_n. \quad (2.61)$$

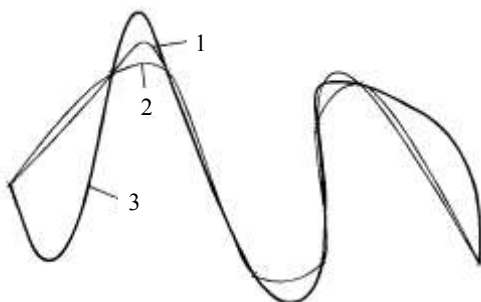


Рисунок 2.8 - Кубический сплайн (1), сплайн Эрмита (2) и сплайн Лагранжа (3).

На рис. 2.8 представлено кубічний сплайн, складовий сплайн Ерміта і сплайн Лагранжа, що побудовані по тим самим вісьмом точкам. На рисунку видно, що криві поведуться по-різному.

комп'ютерній графіці для моделювання гладких ліній. Оскільки криву Без'є повністю визначає опукла оболонка з опорних точок, останні можуть бути відображені і використані для наочного керування формою лінії. Крім того, афінні перетворення кривої (перенос, масштабування, обертання) також легко можуть бути здійснені шляхом застосування трансформацій до опорних точок. Наявність опуклої оболонки значно полегшує задачу про точки перетинання кривих Без'є: якщо не перетинаються опуклі оболонки, то не перетинаються й самі криві.

Координати сплайнів є поліномами параметру кривої. У загальному випадку сегменти таких кривих описують векторними функціями виду

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n t^i \mathbf{a}_i . \quad (2.64)$$

Суть векторів \mathbf{a}_i , полягає тільки в тому, що їх компоненти є коефіцієнтами поліномів для компонентів результуючого вектору. Інакше кажучи, вектори \mathbf{a}_i не несуть геометричної інформації кожний окремо. Але якщо перегрупувати праву частину (2.62), то можна одержати вираз, у якому векторні величини мають певний геометричний зміст. Це можна спостерігати на прикладі інтерполяційної формули Лагранжа, де радіус-вектор кривої представлено у вигляді

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n L_i(t) \mathbf{p}_i , \quad (2.65)$$

векторні коефіцієнти \mathbf{p}_i були радіус-векторами характеристичних точок кривої, а залежність кривої від параметру була зосереджена в скалярних функціях $L_i(t)$, індивідуальних для кожної характеристичної точки \mathbf{p}_i .

Де Кастельо і незалежно від нього Без'є запропонували аналогічний (2.66) підхід для побудови кривих. Ці криві одержали назву кривих Без'є.

Криву Без'є описують формулою

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{p}_i = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \mathbf{p}_i, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.66)$$

де \mathbf{p}_i - радіус-вектори точок, а n - число цих точок мінус один.

2.5.1. Функції Бернштейна

Сукупність функцій

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad (2.67)$$

називають *базисом Бернштейна*. Можна сказати, що крива Без'є є поліномом Бернштейна з векторними коефіцієнтами.

Спочатку де Кастельо і Без'є використовували окремі випадки кривої (2.67) і тільки пізніше Форрест встановив зв'язок коефіцієнтів кривої з поліномами Бернштейна. Коефіцієнти при $t_i(1-t)^{n-i}$ у (2.67) дорівнюють коефіцієнтам $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ бінома

Ньютона: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i$. Із цього витікає, що базис

Бернштейна є розкладанням одиниці (сума всіх коефіцієнтів при будь-якому t дорівнює одиниці)

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = [t + (1-t)]^n = 1^n = 1. \quad (2.68)$$

Функції Бернштейна задовольняють рекурентному співвідношенню

$$B_i^n = t B_{i-1}^{n-1} + (1-t) B_i^{n-1}. \quad (2.69)$$

Використовуючи це рекурентне співвідношення, можна обчислити всі функції Бернштейна. Обчислення починають з функції $B_0^0(t) = 1$. Далі одержують $B_1^1(t) = t$, $B_0^1(t) = 1-t$. Всі функції, один з індексів яких дорівнює негативному числу, вважають рівними нулю. Продовживши обчислення, одержують всі

функції Бернштейна.

2.5.2. Алгоритм де Кастельо

Підставимо рекурентне співвідношення у вираз (2.66), виділивши крайні точки з огляду на те, що $B_0^n = (1-t)^n$, $B_n^n = t^n$, наприкінці прийдемо до рівнянь

$$\mathbf{r}_i^{(0)} = \sum_{j=0}^0 B_0^0(t) \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.70)$$

Позначивши $\mathbf{r}(t)$ через $\mathbf{r}_0^{(n)}(t)$, а \mathbf{p}_i - через $\mathbf{r}_0^{(0)}$, одержимо рекурентне співвідношення для обчислення точки кривої Без'є

$$\mathbf{r}_i^{(k)} = (1-t)\mathbf{r}_i^{(k-1)} + t\mathbf{r}_{i+1}^{(k-1)}, \quad i+k \leq n. \quad (2.71)$$

Алгоритм, описаний співвідношенням (2.71), називають *алгоритмом де Кастельо*. Алгоритм де Кастельо дозволяє обчислити будь-яку точку кривої Без'є за характеристичними точках без відомостей про функції Бернштейна. Величини $(1-t)$ і t , на які множать координати точок $\mathbf{r}_i^{(k-1)}$ і $\mathbf{r}_{i+1}^{(k-1)}$, є барицентричними координатами. Криву Без'є можна визначити як лінію, точки якої визначають рекурентним співвідношенням (2.71).

2.5.3. Властивості кривих Без'є

Досить гнучкою й у той же час простою для практичного застосування є кубічна крива Без'є, радіус-вектор якої описують залежністю

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)^3 \mathbf{p}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{p}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{p}_2 + t^3 \mathbf{p}_3. \quad (2.72)$$

Приклади кубічних кривих Без'є та їх характеристичні ламані представлено на рис. 2.9.

Коефіцієнти \mathbf{a}_i цієї ж кривої у формі полінома пов'язані з вершинами \mathbf{p}_i співвідношеннями

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{a}_1 = 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \quad \mathbf{a}_2 = 3(\mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0), \\ \mathbf{a}_3 &= \mathbf{p}_3 - 3\mathbf{p}_2 + 3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

На прикладі (рис. 2.9) кубічної кривої Без'є видно, що її модифікація шляхом переміщення точок p_i більш наглядна, ніж модифікація шляхом зміни векторних коефіцієнтів a_i , тому що в останньому випадку важко вгадати результат.

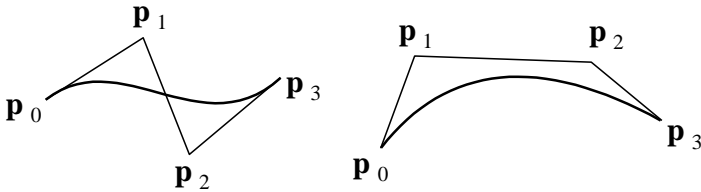


Рисунок 2.9 – Криві Без'є

Оскільки крива не проходить через внутрішні вершини своєї характеристичної ламаної, досить складно задати її точне положення. Криві у формі Без'є зручніші там, де важлива форма ліній, наприклад, при комп'ютерному дизайні конструкцій типу кузова автомобіля. Чим більше точок беруть участь у побудові кривої, тим вона гладкіша. На рис. 2.10 наведено криву Без'є, побудовану по 7 точкам.

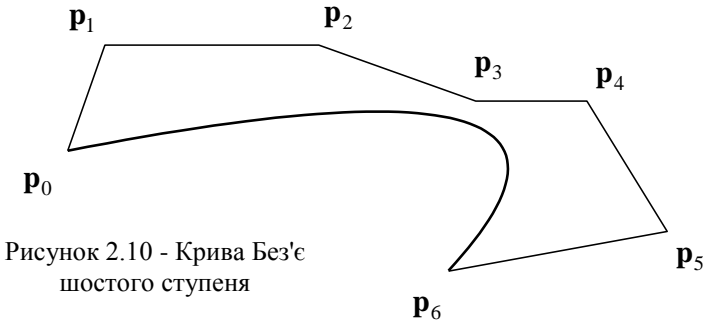


Рисунок 2.10 - Крива Без'є шостога ступеня

Для побудови кривої, що проходить через задані точки, використовують складові криві Без'є. Крива Без'є завжди торкається своєї характеристичної ламаної на кінцях. Якщо ми бажаємо, щоб складова крива була гладкою, необхідно стежити за тим, щоб у точках стикування дотичні до частин кривих збігалися.

У загальному випадку в точках з'єднання перша похідна стрибком мінятиме своє значення, а всі вищі похідні зазнаватимуть розрив. Для безперервності першої похідної складової кривої Без'є потрібне торкання і рівність довжин крайніх ділянок характеристичних ламаних у місці стикування. Параметрична довжина складової кривої Без'є дорівнює сумі параметричних довжин частин, тобто числу цих частин. Якщо вершини кривої Без'є лежать на одній прямій, крива перетворюється у відрізок прямої. Відрізок прямої лінії є і крива Без'є першого ступеня.

2.6. В-сплайни

Ступінь кривої Без'є визначають кількістю заданих точок, причому всі вони впливають на форму кривої. Ці особливості кривих Без'є створюють певні незручності. По-перше, при апроксимації кривої складної форми за допомогою кривої Без'є неминуче використовують безліч заданих точок, у результаті чого утворюється крива високого порядку. Така крива може осцилювати і в результаті збільшувати обчислювальне навантаження на комп'ютер. Чому б у такому випадку не спробувати представити ту ж вихідну криву безліччю кривих Без'є нижчих порядків, щоб уникнути цих неприємностей? Проблема у тому, що з'єднання кривих із забезпеченням безперервності похідних потрібних порядків є досить складною процедурою.

По-друге, трудомістким є також локальна зміна форми кривої. Здається природним перемістити задані точки поблизу змінюваної ділянки кривої, і дійсно, це призводить до модифікації потрібної області, але разом з нею змінюється і вся крива. Цю особливість називають властивістю глобальності змін (*global modification property*). Глобальність змін небажана при створенні кривих заданої форми, оскільки криві завжди створюють або проектують шляхом безперервної модифікації грубої форми початкового наближення. У системах автоматизованого проектування бажана наявність протилежної властивості - локальності змін (*local modification property*).

Описані недоліки кривих Без'є пов'язані з вибором функцій сполучення. Таким чином, нам потрібно вибрати новий набір функцій сполучення, що мають певні властивості. По-перше, у

визначення нової функції сполучення не повинно входити число точок n , на відміну від функції $B_i^n(t)$. Ступінь функції сполучення, а отже і ступінь кривої, повинні бути незалежними від числа заданих точок n . По-друге, всі функції сполучення повинні бути відмінними від нуля тільки на обмежених підмножинах значень параметру, при чому для кожної функції така підмножина повинна бути унікальною. У цьому випадку форму сегменту визначають тільки тими заданими точками, які враховані функціями сполучення, що мають ненульові значення на даному сегменті.

У 1972 р. Кокс і де Бур [2] запропонували використовувати функції $N_{i,k}(t)$, визначені рекурсивно. Криву, що будують таким чином, називають В-сплайном (B-spline) і записують у наступному вигляді:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i N_{i,k}(t), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_{k+1}, \quad (2.74)$$

де

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t-t_i)N_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1}-t_i} + \frac{(t_{i+k}-t)N_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k}-t_{i+1}}, \quad (2.75)$$

$$N_{i,1}(t) = 1 \text{ якщо } t_i \leq t \leq t_{i+1}; 0 - \text{ у протилежному випадку. } (2.76)$$

Значення t , називають *вузловими* - вони обмежують відрізки значень параметру, всередині яких функції сполучення мають ненульові значення.

У формулі (2.74) невизначеність $0/0$ вважають рівною нулю. Як слідує з цього рівняння, для визначення $n+1$ функцій сполучення необхідно задати $n+k+1$ вузлових значень від t_0 до t_{n+k} . Різні методи завдання вузлових значень дозволяють одержати різні функції сполучення й, відповідно, різні криві. Нижче розглянемо, як це роблять. З формули (2.74) витікає, що одночасний зсув усіх вузлових значень на те саме число не призводить до зміни форми кривої. При цьому відбувається лише зміна діапазону значень параметру рівняння.

Перевіримо, чи задовольняють функції сполучення, задані рівняннями (2.74), вимогам, викладеним на початку підрозділу. 3

рівняння (2.74) слідує, що ступінь $N_{i,k}(t)$ на одиницю вищий, ніж в $N_{i,k-1}(t)$ і $N_{i+1,k-1}(t)$. Отже, $N_{i,2}(t)$ має ступінь 1, оскільки $N_{i,1}(t)$ - константа, а $N_{i,3}(t)$ з тієї ж причини має ступінь 2. Продовжуючи, можна дійти висновку, що функція $N_{i,k}(t)$ має ступінь $k - 1$. Таким чином, ступінь В-сплайну визначають не числом заданих точок, а значенням k , що повинно бути на одиницю більше бажаного значення ступеня кривої. Значення k називають порядком В-сплайну (order of the B-spline curve).

Щоб показати, що будь-яку ділянку В-сплайну визначають лише кінцевим числом заданих точок, розглянемо сегмент кривої, який відповідає значенням параметру з відрізка $[t_i, t_{i+1}]$. Впливати на цей сегмент будуть ті задані точки, функції сполучення яких (порядку k) відмінні від нуля на відрізку $[t_i, t_{i+1}]$.

Серед функцій першого порядку від нуля відмінна тільки $N_{i,1}(t)$. Підставивши $N_{i,1}(t)$ в праву частину формули (2.74), одержимо на розглянутому відрізку ненульові функції $N_{i,2}(t)$ й $N_{i-1,2}(t)$. Перша функція виходить підстановкою $N_{i,1}(t)$ в перший доданок, а друга функція - підстановкою в другий доданок. Потім за ненульовими функціями $N_{i,2}(t)$ і $N_{i-1,2}(t)$ одержимо функції третього порядку і т.п., поки не будуть отримані функції порядку k .

Визначемо $n + k + 1$ вузлових значень від t_0 до t_{n+k} . Вузли бувають двох основних типів: періодичні і неперіодичні. Періодичні вузли визначають з рівняння

$$t_i = i - k, \quad 0 \leq i \leq n + k. \quad (2.77)$$

Неперіодичні вузли задають формулою

$$t_i = \begin{cases} 0 & 0 \leq i \leq k, \\ i - k + 1 & k \leq i \leq n, \\ n - k + 2 & n < i \leq n + k. \end{cases} \quad (2.78)$$

Головна відмінність вузлів різних типів полягає у тому, що перший і останній неперіодичні вузли повторюються k раз.

Повторення вузлів призводить до того, що В-сплайн проходить через першу і останню задані точки, подібно кривій Без'є. У періодичному В-сплайні перша й остання точки впливають на форму кривої так само, як і всі інші точки, а тому крива не проходить через них. Загалом, функція сполучення для періодичних вузлів повторюється через рівні проміжки значень параметру, тому вузли й називають періодичними. Неперіодичні криві частіше використовують в системах автоматизованого проектування, оскільки більшості конструкторів зручніше працювати з кривими, що проходять через першу й останню точки.

Вирази (2.77) й (2.78) показують, що відстань між сусідніми вузлами завжди однакова і дорівнює одиниці. Такі вузли називають однорідними (*uniform knots*), як і В-сплайн, що проходить через них. Однорідний В-сплайн може бути як періодичним, так і неперіодичним. При зміні форми кривої конструктори часто додають і видаляють вузли, у результаті чого В-сплайн стає неоднорідним. Оскільки однорідність є окремим випадком неоднорідності, неоднорідні В-сплайни вважають узагальненням однорідних. Таким чином, більшість САПР дозволяють створювати та модифікувати неоднорідні і неперіодичні В-сплайни.

2.6.1. Обчислення В-сплайну

Розписати функції сполучення В-сплайну в поліноміальній формі - задача непроста. Особливо складною вона стає при великих k . Тому для обчислення координат точок кривої поліноміальну форму рівняння В-сплайну використовують рідко. Замість цього конкретні значення параметру підставляють в рекурентне рівняння (2.74) і по них обчислюють координати точок, що відповідають цим значенням параметру. Кокс і де Бур запропонували переписати рівняння (2.74) таким чином, щоб замість рекурентної підстановки одержати ітерацію, подібно тому як це роблять в алгоритмі де Кастильо. Їх метод дозволяє визначити точки, що задають В-сплайни, які одержані при діленні вихідної кривої в обчислюваній точці (див. [1, 2]).

2.6.2. Об'єднання В-сплайнів

В-сплайн можна не тільки розділити на два В-сплайни, але і

об'єднати з іншим В-сплайном, у результаті чого утворюється В-сплайн того ж порядку. Задача полягає в тому, щоб знайти точки, що задають, і вузлові значення для об'єднаної кривої. Докладний опис цієї процедури наведен в [1, 2].

2.7. NURBS криві

2.7.1. Неоднорідний раціональний В-сплайн

Неоднорідний раціональний В-сплайн або скорочено NURBS (nonuniform rational B-spline curve) подібний звичайному неоднорідному В-сплайну, оскільки заснований на тих же функціях сполучення, які одержані для неоднорідних вузлів. Однак точки, що задають раціональний В-сплайн, вказують у формі, тобто з використанням однорідних координат. Функції сполучення застосовують саме до цих однорідних координат. Координати точки на кривій NURBS в однорідному просторі знаходять з формул:

$$xh = \sum_{i=0}^n (h_i x_i) N_{i,k}(t); \quad (2.79)$$

$$yh = \sum_{i=0}^n (h_i y_i) N_{i,k}(t); \quad (2.80)$$

$$zh = \sum_{i=0}^n (h_i z_i) N_{i,k}(t); \quad (2.81)$$

$$h = \sum_{i=0}^n h_i N_{i,k}(t). \quad (2.82)$$

Координати точки в тривимірному просторі x , y і z одержують діленням xh , yh і zh на h , тому рівняння кривої NURBS у векторному вигляді записують наступним чином (тут розділили рівняння (2.79), (2.80) і (2.81) на (2.82):

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i \mathbf{p}_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n h_i N_{i,k}(t)}, \quad (2.83)$$

де \mathbf{p}_i - вектор $(x_i \ y_i \ z_i)$, що поєднує координати i -ї точки, яку задають, у тривимірному просторі, як і для нераціональних В-сплайнів.

Рівняння (2.83) відображає наступні властивості кривої NURBS.

- Подібно нераціональному В-сплайну крива NURBS, представлена рівнянням (2.83), обов'язково проходить через першу і останню точки, які задають, якщо використовують неперіодичні вузли. Це твердження можна довести таким чином. Чисельник формули (2.83) можна вважати В-сплайном із точками, які задають, $h_i \mathbf{p}_i$. Граничним значенням параметру відповідають координати $h_0 \mathbf{p}_0$ і $h_n \mathbf{p}_n$, оскільки В-сплайн із неперіодичними вузлами проходить через першу і останню точки, які задають. Знаменник (2.83) також вважають В-сплайном із точками, які задають, h_i . Граничним значенням параметру для цього В-сплайну відповідатимуть координати h_0 і h_n . Отже, граничним значенням параметру для $\mathbf{p}(t)$ в цілому відповідатимуть координати \mathbf{p}_0 і \mathbf{p}_n , тобто граничні точки, які задають.

- Дотична в початковій точці збігається за напрямком з вектором $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$, а дотична у кінцевій точці - з вектором $\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}$.

- Знаменник (2.83) стає рівним 1, коли всі h_i -і стають рівними 1, оскільки $\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) = 1^1$. Рівняння (2.83) при цьому перетворюється в рівняння В-сплайну. Тому можна сказати, що рівняння NURBS може описувати не тільки NURBS-криві, але й звичайні В-сплайни. Крива Без'є є окремим випадком В-сплайну, тому рівняння NURBS може так само описувати криві Без'є і раціональні криві Без'є.

Рівняння NURBS-кривої має певні переваги перед рівнянням В-сплайну.

- Форма В-сплайну змінюється при зміні координат x, y, z точок, які задають. Таким чином, для кожної точки, яку задають, є

три ступені вільності. Крива NURBS дозволяє змінювати четверту координату для кожної точки - h_i . З'являється можливість працювати із кривою на більш тонкому рівні. Збільшення значення однорідної координати точки, яку задають, призводить до того, що NURBS-крива притягається ближче до цієї точки.

- Рівняння NURBS дозволяє точно відтворити всі конічні перерізи - коло, еліпс, параболу і гіперболу. В-сплайни, навпаки, допускають лише наближення до конічних перерізів. Таким чином, в NURBS-представленні можна працювати з конічними перерізами, кривими Без'є, раціональними кривими Без'є та В-сплайнами. Перетворення всіх цих кривих до NURBS може значно скоротити обсяг програмування. Наприклад, можна написати одну-єдину програму для розрахунку точки перетинання кривих NURBS і використовувати її для розрахунку перетинань кривих будь-яких типів, оскільки ці криві завжди можуть бути перетворені до відповідного NURBS-представлення.

2.7.2. Обчислення NURBS-кривої

Координати x, y, z точки на NURBS-кривої, яку визначають значенням параметру t_0 , знаходять по формулі:

$$\mathbf{p}(t_0) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i \mathbf{p}_i N_{i,k}(t_0)}{\sum_{i=0}^n h_i N_{i,k}(t_0)}. \quad (2.84)$$

І чисельник, і знаменник у виразі (2.84) мають форму рівняння В-сплайну, тому їх можна обчислювати за алгоритмом, призначеним для обчислення В-сплайну. Алгоритм Коксу - де Бура наведено в [1, 2] та ін.

При обчисленні чисельника як точки, яку задають, варто брати точки з координатами $h_i \mathbf{p}_i$, а при обчисленні знаменника - точки h_i .

2.8. Лінії, що базуються на лініях

Деякі лінії можуть бути побудовані на базі інших ліній. Розглянемо параметрично зрізану, еквідистантну, посилальну та

продовжену криві. Криву, на основі якої будують нову криву, називатимемо базовою. Базову криву визначатимемо в структурі даних розглянутих нижче кривих.

2.8.1. Зрізана крива

Параметрично зрізана крива є частиною будь-якої іншої кривої. Зрізання здійснюють шляхом зміни області визначення параметру базової кривої. Нехай параметр базової кривої t змінюють в межах $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$. Зрізану криву визначимо як частину базової кривої, що починається при t_{begin} і кінчається при t_{end} , де $t_{\min} \leq t_{\text{begin}} \leq t_{\max}$ і $t_{\min} \leq t_{\text{end}} \leq t_{\max}$.

Напрямок зрізаної кривої може збігатися з напрямком базової кривої або бути йому протилежним, наприклад, при $t_{\text{end}} < t_{\text{begin}}$. Якщо крива замкнута, то рух від точки t_{begin} до точки t_{end} можна виконати двома способами: у позитивному напрямку базової кривої та у протилежному напрямку. Щоб подолати неоднозначність для замкнутих кривих, у дані зрізаної кривої вводять параметр sign , що характеризує збіг її напрямку з напрямком базової кривої і приймає значення $+1$ або -1 . Параметру базової кривої t_{begin} відповідає параметр зрізаної кривої $w_{\min} = 0$, параметру базової кривої t_{end} – параметр зрізаної кривої $w_{\max} = s$, де $s = s(t_{\text{begin}}, t_{\text{end}})$ – параметрична відстань між t_{end} і t_{begin} з урахуванням замкнутості кривої. Якщо крива не замкнута, то $s = |t_{\text{end}} - t_{\text{begin}}|$. Радіус-вектор зрізаної кривої описують формулою

$$\mathbf{r}(w) = \mathbf{r}_b(t_{\text{begin}} + w \cdot \text{sign}), \quad 0 \leq w \leq s(t_{\text{begin}}, t_{\text{end}}), \quad (2.85)$$

де $\mathbf{r}_b(t)$, $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ – базова крива; $s(t_{\text{begin}}, t_{\text{end}})$ – відстань між параметрами зрізання t_{begin} , t_{end} базової кривої.

2.8.2. Еквідистантна крива

Еквідистантну лінію описують радіус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_b(t) + \mathbf{a} \times \mathbf{t}_b(t), \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad (2.86)$$

де $\mathbf{r}_b(t)$ – базова крива; $\mathbf{t}_b(t) = \frac{\mathbf{r}_b'(t)}{\sqrt{\mathbf{r}_b'(t) \cdot \mathbf{r}_b'(t)}}$ – одиничний дотичний

вектор до базової кривої в даній точці; \mathbf{a} – заданий вектор.

Область зміни параметру еквідистантної кривої збігається з областю зміни параметру базової кривої. Еквідистантна крива виправдовує свою назву, якщо $\mathbf{r}_b(t)$ - плоска крива, а вектор \mathbf{a} є ортогональним до площини базової кривої. У цьому випадку другий доданок у правій частині (2.86) є вектором, що лежить у площині базової кривої, ортогональний до неї і має довжину вектору \mathbf{a} . У результаті одержимо криву, кожна точка якої відстоїть по нормалі від відповідної точки базової кривої на однакову відстань (рис. 2.11).

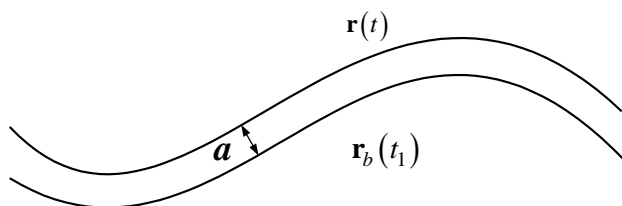


Рисунок 2.11 - Эквидистантная кривая

2.8.3. Посилальна крива

Посилальна крива – це лінія, кожна точка якої отримана шляхом деякого перетворення відповідної точки базової кривої. Посилальну криву описують радіус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{M}_t \cdot \mathbf{r}_b(t), \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad (2.87)$$

де $\mathbf{r}_b(t)$ - базова крива; \mathbf{M}_t - розширена матриця перетворення базової кривої [1]. Область зміни параметру посилальної кривої збігається з областю зміни параметру базової кривої.

2.8.4. Репараметризована крива

До ліній, що побудовані на базі ліній, можна віднести криву зі зміненою областю параметру. Нехай потрібно, щоб крива $\mathbf{r}_b(t)$, $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ мала область визначення параметру $w_{\min} \leq w \leq w_{\max}$. У цьому випадку можна побудувати репараметризовану криву

$$\mathbf{r}(w) = \mathbf{r}_b[t(w)], \quad w_{\min} \leq w \leq w_{\max}, \quad (2.88)$$

$$\text{де} \quad t(w) = t_{\min} \frac{w_{\max} - w}{w_{\max} - w_{\min}} + t_{\min} \frac{w - w_{\min}}{w_{\max} - w_{\min}}, \quad (2.89)$$

яка повністю збігається з кривою $\mathbf{r}_b(t)$, але має іншу область визначення параметру. Лінію зі зміненою довжиною параметру застосовують для узгодження областей зміни параметру двох кривих, що лежать в основі кривої перетинання при побудові ребер тіл.

2.8.5. Продовжена крива

Довільну лінію можна не тільки зрізати, але й продовжувати необхідним чином. Будь-яка крива може бути продовжена (або зрізана) на задану параметричну відстань.

Нехай потрібно продовжити криву $\mathbf{r}_b(t)$, $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ шляхом розширення області визначення параметрів до $a + t_{\min} \leq t \leq t_{\max} + b$. При $a < 0$ і $b > 0$ крива продовжує свої межі, при $a > 0$ і $b < 0$ крива зрізається. Якщо крива є замкнутою, то при виході параметру за межу області визначення слід виконати його циклічне перерахування

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_b(t + t_{\Delta}), & t < t_{\min}; \\ \mathbf{r}_b(t), & t_{\min} \leq t \leq t_{\max}; \\ \mathbf{r}_b(t - t_{\Delta}), & t_{\max} < t, \end{cases} \quad (2.90)$$

де $t_{\Delta} = t_{\max} - t_{\min}$.

Якщо ж крива не є замкнутою, а її параметр вийшов за межу області визначення, то слід продовжити криву по дотичній, яку вона мала на відповідному кінці, і обчислити по продовженій кривій необхідні геометричні характеристики. Радіус-вектор продовженої кривої обчислимо за формулі

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_b(t_{\min}) + (t - t_{\min}) \frac{d\mathbf{r}_b}{dt} \Big|_{t_{\min}}, & t < t_{\min}; \\ \mathbf{r}_b(t), & t_{\min} \leq t \leq t_{\max}; \\ \mathbf{r}_b(t_{\max}) + (t - t_{\max}) \frac{d\mathbf{r}_b}{dt} \Big|_{t_{\max}}, & t_{\max} < t. \end{cases} \quad (2.91)$$

Диференціюючи формули (2.90) і (2.91), одержимо похідні радіус-вектору продовженої кривої. За формулами (2.90) або (2.91) можна обчислювати геометричну інформацію відповідно до замкнутій або незамкнутій кривої при виході її параметру за область визначення.

Загальне правило. Всі криві, у даних яких лежить інша крива, не повинні допускати багаторазового спадкування свого ж типу. Наприклад, у якості базової кривої для параметрично зрізаної кривої не повинна бути використана інша параметрично зрізана крива, а повинна бути використана базова крива останньої з відповідним перерахуванням параметрів зрізу. Аналогічні правила повинні діяти й для інших базованих кривих. Якщо потрібно побудувати еквідистантну лінію на базі іншої еквідистантної кривої $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}_b(t) + \mathbf{a}' \times \mathbf{t}_b(t)$, то в якості базової лінії потрібно використовувати базову криву останньої $\mathbf{r}_b(t)$, а вектор еквідистанти повинен дорівнювати $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$. Якщо потрібно побудувати посиальну криву на базі іншої посиальної кривої $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{M}_t' \cdot \mathbf{r}_b(t)$, то в якості базової лінії потрібно використовувати базову криву останньої, а матрицю перетворення слід визначати як добуток матриць $\mathbf{M}_t \cdot \mathbf{M}_t'$.

2.9. Складні криві

З декількох кривих можна побудувати *складну криву* - найбільш загальний тип кривої. Вони характерні тим, що перша похідна радіус-вектору в точках стикування терпить розрив або по довжині або по довжині та напрямку. Розглянуті вище сплайнові складові криві формували з кривих одного типу, і в них у загальному випадку перша похідна радіус-вектору терпіла розрив по довжині. Але складові криві можна формувати й з кривих різної

природи. Криві, що утворюють складову криву, називатимемо *сегментами*. При побудові складної кривої повинні бути виконані певні умови: початок кожного наступного сегменту повинен збігатися з кінцем попереднього сегменту. Якщо сегменти складної кривої стикуються не гладко, то складна крива буде мати злами. У загальному випадку в місцях стику сегментів похідні складної кривої терплять розрив по довжині й напрямку. Приклад складної кривої наведено на рис. 2.12.

Замкнуту складну криву називатимемо *контуром*. Для контуру початок першого сегменту повинен збігатися з кінцем останнього сегменту.

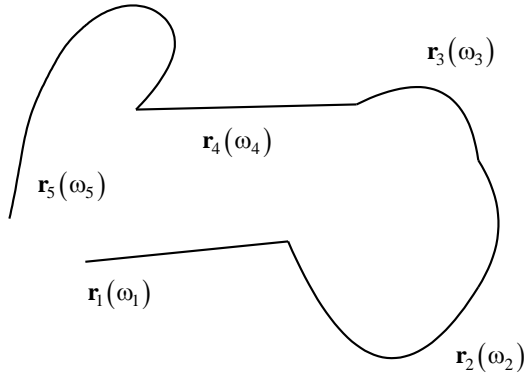


Рисунок 2.12 - Складна крива

Нехай складна крива містить n сегментів

$$\mathbf{r}_i(w_i), \quad w_{i \min} \leq w_i \leq w_{i \max}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.92)$$

Початкове значення параметру t складної кривої приймемо рівним нулю. Параметричну довжину складної кривої приймемо рівній сумі параметричних довжин кривих, що її складають

$$t_{\min} = 0, \quad t_{\max} = \sum_{i=1}^n (w_{i \max} - w_{i \min}). \quad (2.93)$$

При обчисленні радіус-вектору складової кривої спочатку

необхідно визначити той сегмент, на який потрапимо, рухаючись по параметру. Потім потрібно визначити відповідне значення власного параметру цього сегменту та за допомогою його значення обчислити радіус-вектор сегменту або його похідної. Нехай для параметру t складової кривої знайдено номер сегменту k , для якого виконується співвідношення

$$\sum_{i=1}^{k-1} (w_{i \max} - w_{i \min}) \leq t \leq \sum_{i=1}^k (w_{i \max} - w_{i \min}). \quad (2.94)$$

Тоді радіус-вектор складової кривої визначають рівнянням

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_k \left[w_{k \min} + t - \sum_{i=1}^{k-1} (w_{i \max} - w_{i \min}) \right] = \mathbf{r}_k(w_k), \quad 0 \leq t \leq t_{\max}, \quad (2.95)$$

де параметр k -го сегмента дорівнює

$$w_{k \min} + t - \sum_{i=1}^{k-1} (w_{i \max} - w_{i \min}). \quad (2.96)$$

Як можна помітити, підхід до обчислення радіус-вектору складної кривої аналогічний підходу до обчислення радіус-вектору ламаної лінії.

Загальне правило. Складна крива є лінією, що базується на інших лініях. Вона повинна задовольняти вимозі про неприпустимість багаторазового спадкування свого ж типу. В якості сегментів складної кривої не можна використовувати інші складові криві, але це не означає, що не можна побудувати складову криву з набору складних кривих. Якщо складну криву потрібно побудувати на основі інших складних кривих, то останні необхідно розглядати як сукупність кривих, а не як єдині лінії. Задача побудови складної кривої з набору складних кривих слід вирішувати шляхом формування кривої складними сегментами.

2.10. Двомірні криві

Всі розглянуті у цьому розділі криві (за винятком циліндричної спіралі), можна побудувати як у тривимірному, так і у двомірному просторі (на площині). В останньому випадку їх

радіус-вектор має дві координати та зазнає перетворення по двовірним матрицям. Вирази для обчислення радіус-вектору двовірних кривих повністю збігаються з відповідними виразами для тривірних кривих. Для побудови двовірних кривих єдине, що потрібно зробити, це замінити тривірні вектори $\mathbf{r}(t) = [r_1(t) \ r_2(t) \ r_3(t)]^T$ на двовірні $\mathbf{r}(t) = [x(t) \ y(t)]^T$.

Двовірні криві можуть бути використані: для побудови плоских просторових кривих, для побудови кривих на поверхнях, для побудови ліній (кривих) перетинання поверхонь і для опису області визначення параметрів поверхні.

2.11. Способи побудови ліній

Всі розглянуті криві можна поділити на дві великі групи: просторові криві та двовірні криві. Такий розподіл базують на тому, що просторові криві та двовірні криві (рис. 2.13) мають різне число вимірів.

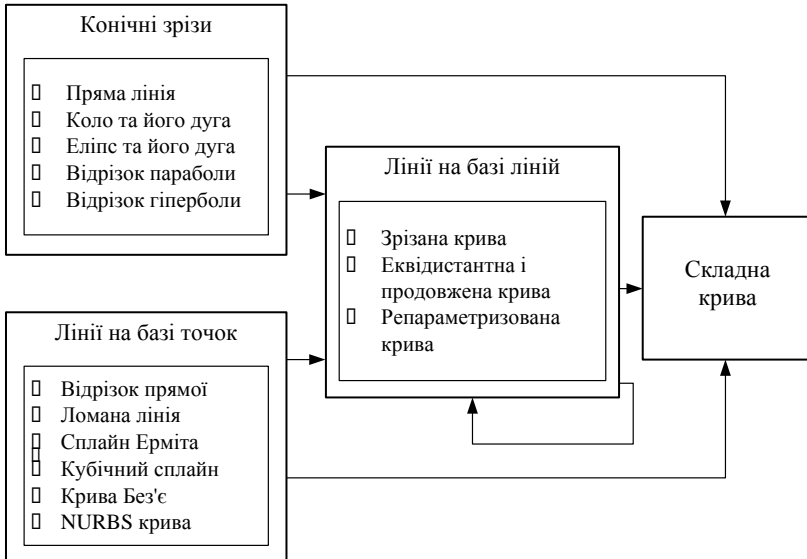


Рисунок 2.13 – Способи побудови двовірних ліній

На базі будь-якої двовірної кривої може бути побудована

просторова крива. Якщо двомірна крива побудована на площині, то для цього потрібно знати положення й орієнтацію в просторі цієї площини. У загальному випадку двомірні криві можуть бути розташовані на довільній поверхні. У цьому випадку для обчислення точки кривої необхідно знати поверхню.

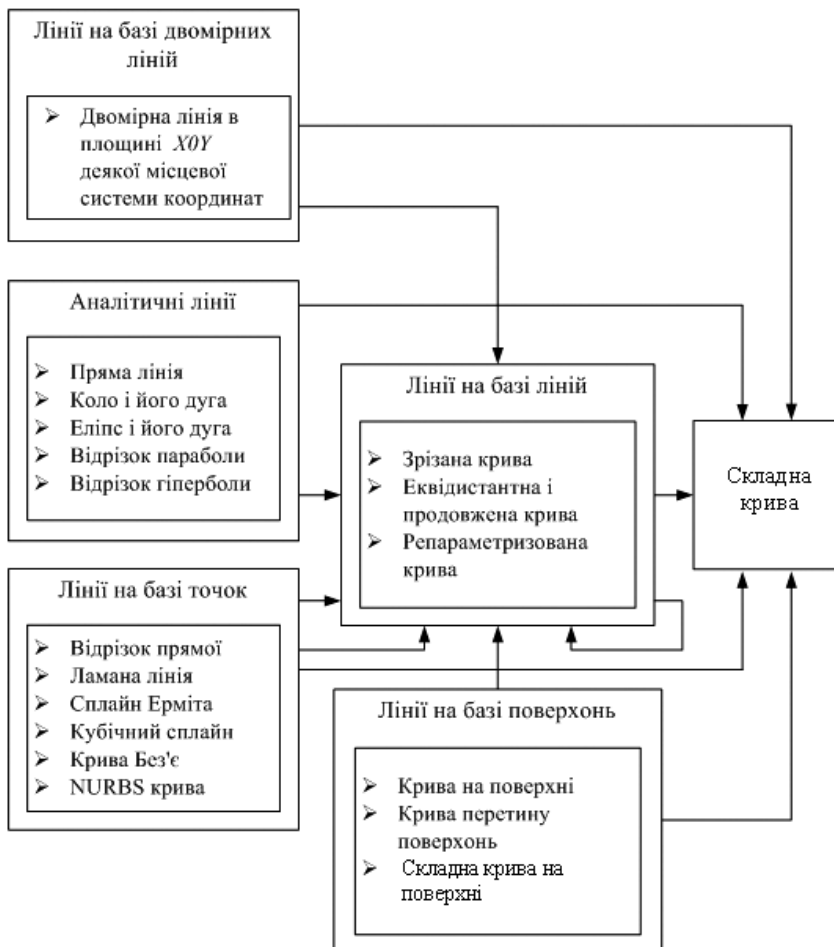


Рисунок 2.14 - Способи побудови просторових ліній

Таким чином, двомірні криві та частина просторових кривих побудовані аналогічно, тільки перші побудовані на основі двомірних об'єктів, а другі – тривимірних. Просторові криві на базі двомірних кривих за формою можуть збігатися зі своїми тривимірними аналогами, але мають відмінну від останніх структуру даних і частину виконуваних функцій.

Рис. 2.14 відображає процес побудови ліній при читанні його зліва направо. Спочатку криві лінії можуть бути побудовані в місцевій системі координат і скалярних параметрів або за характерними точками. Далі ці криві можуть бути подовжені або зрізані. На базі декількох кривих можна побудувати найбільш загальну лінію - складну криву.

Всі криві мають різні структури даних, але повинні виконувати ті ж самі функції. Остання властивість забезпечує рівнозначність всіх кривих ліній. До загальних функцій довільного геометричного об'єкту для кривих ліній варто додати функції обчислення радіус-вектору кривої, похідних радіус-вектору за параметром, дотичного вектору, нормалі та бінормалі кривої, функції надання інформації про область визначення параметру кривої (початкового параметру, кінцевого параметру, замкнутості), функції модифікації форми кривої. Математична модель кривої не обмежується перерахованими функціями. Вона повинна бути доповнена функціями, що забезпечують взаємодію кривої з іншими геометричними об'єктами і виконання з нею різних операцій.

Питання для самостійного контролю.

1. Назвіть принципи побудови математичних моделей кривих ліній.
2. Проведіть порівняльний аналіз основних аналітичних ліній.
3. Напишіть рівняння прямої лінії і дайте опис її параметрів.
4. Напишіть рівняння відрізка прямої лінії і дайте опис його параметрів.
5. Дайте короткий опис плоских кривих.
6. Напишіть рівняння окружності і дайте опис її параметрів.
7. Напишіть рівняння еліпса і дайте опис його параметрів.
8. Напишіть рівняння гіперболи і дайте опис її параметрів.

-
9. Напишіть рівняння параболи і дайте опис її параметрів.
 10. Які є особливості моделювання дуги окружності або еліпсу?
 11. Які є особливості моделювання циліндричної спіралі?
 12. Розкрийте зміст поняття «криві другого порядку».
 13. Охарактеризуйте роль і значення використання сплайнів.
 14. Порівняйте принципи побудови B-сплайнів і кривих Без'є.
 15. Порівняйте принципи побудови NURBS кривих і B-сплайнів.
 16. Вкажіть особливості моделювання ліній, що базуються на лініях.
 17. Які є принципи побудови складних кривих?
 18. Наведіть класифікацію способів побудови ліній.

РОЗДІЛ 3. МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

У системах геометричного моделювання зберігаються рівняння кривих (або еквівалентні характеристичні параметри) для всіх ребер і рівняння поверхонь (або еквівалентні параметри) для всіх граней. Корисно знати, якими бувають рівняння поверхонь і які параметри їх визначають. Для реалізації булевих операцій необхідно розраховувати точки перетину кривих. У системах поверхневого моделювання з тією ж метою доводиться визначати криві, по яких перетинаються поверхні. Наприклад, якщо в процесі моделювання одну поверхню відрізає інша, то це вимагає обчислення кривої, по якій вони перетинаються. Така задача потребує обчислення координат точок на поверхнях, а також похідних у цих точках. У цьому розділі на базі [2] коротко розглянуті різні типи рівнянь поверхонь і методи роботи з ними: методи обчислення координат, диференціювання й обробки перетинів. Всі ці питання розглянуті більш докладно в літературних джерелах по 3D геометричному моделюванню та обчислювальній геометрії [1, 3-5].

3.1. Типи рівнянь поверхонь

Рівняння поверхонь, як і рівняння кривих, поділяють на два основних типи.

До першого типу відносять параметричні рівняння, що зв'язують значення координат x , y і z зі значеннями параметру. До другого – непараметричні рівняння, що зв'язують координати x , y та z безпосередньо одну з одною будь-якою функцією. Пояснимо ці визначення на простому прикладі.

Розглянемо сферу радіуса R з центром на початку координат. Параметричне рівняння цієї сфери матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, v) &= R \cos u \cos v \mathbf{i} + R \sin u \cos v \mathbf{j} + R \sin v \mathbf{k}; \\ (0 \leq u \leq 2\pi, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2), \end{aligned} \quad (3.1)$$

де параметр u можна розглядати як довготу, а v – широту.

Ту ж сферу можна описати й без параметрів u і v :

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (3.2)$$

або

$$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (3.3)$$

Рівняння (3.2) називають *неявним непараметричним*, а рівняння (3.3) – *явним непараметричним*.

У кожного типу рівнянь є свої переваги й недоліки. Ми будемо розглядати тільки параметричні рівняння. Параметричне рівняння дозволяє ефективно обчислювати точки на поверхні або кривій, які відстоять одна від одної на невеликих відстанях, що полегшує інтерактивне відображення об'єкту та роботу з ним. Це одна з головних причин, з яких параметричні рівняння використовують для представлення поверхонь у більшості систем автоматизованого проектування.

3.2. Білінійна поверхня

Білінійну поверхню (bilinear surface) будують за чотирьома заданими точками і описують лінійними рівняннями з параметрами u і v . Ці точки опиняються в кутах побудованої поверхні. Ми позначимо їх літерами $\mathbf{P}_{0,0}$, $\mathbf{P}_{1,0}$, $\mathbf{P}_{0,1}$, $\mathbf{P}_{1,1}$ (рис. 3.1).

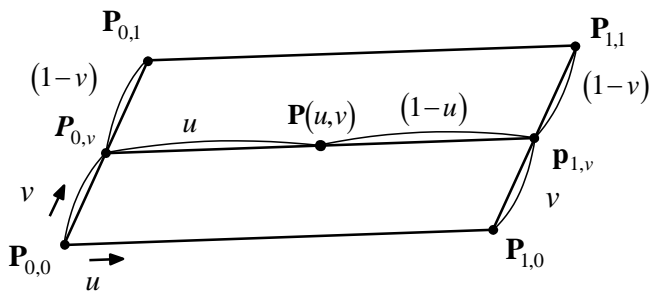


Рисунок 3.1 - Білінійна поверхня та її опорні точки

Вивести рівняння білінійної поверхні - це значить знайти вираз для координат довільної точки за значеннями параметрів u і v . Припустимо, що ця точка ділить відрізок $[\mathbf{P}_{0,v}, \mathbf{P}_{1,v}]$ у відношенні $u:(1-u)$ (рис. 3.1). Точки $\mathbf{P}_{0,v}$ і $\mathbf{P}_{1,v}$ ділять відрізки $\mathbf{P}_{0,0}\mathbf{P}_{0,1}$ і $\mathbf{P}_{1,0}\mathbf{P}_{1,1}$ відповідно у відношенні $v:(1-v)$. Визначена в такий спосіб точка

$\mathbf{P}(u,v)$ переміщатиметься по всій поверхні при зміні параметрів u і v від 0 до 1. З урахуванням зроблених припущень координати точок $\mathbf{P}_{0,v}$ і $\mathbf{P}_{1,v}$ запишуть в такий спосіб:

$$\mathbf{P}_{0,v} = (1-v)\mathbf{P}_{0,0} + v\mathbf{P}_{0,1}; \quad (3.4)$$

$$\mathbf{P}_{1,v} = (1-v)\mathbf{P}_{1,0} + v\mathbf{P}_{1,1}. \quad (3.5)$$

Криві, по яких перетинаються поверхні, у деяких випадках зручніше розраховувати, представляючи одну із цих поверхонь параметричним рівнянням, а іншу - непараметричним. Тому в деяких системах можуть використовувати й непараметричні рівняння поверхонь, хоча і не як основний тип рівнянь для зберігання відомостей про криві. У цьому випадку виникає потреба в процедурі перетворення з параметричної форми в непараметричну й навпаки.

Аналогічно знаходять координати точки $\mathbf{P}(u,v)$:

$$\mathbf{P}(u,v) = (1-u)\mathbf{P}_{0,v} + u\mathbf{P}_{1,v}. \quad (3.6)$$

Підстановка рівнянь (3.4) і (3.5) в (3.6) дає наступне рівняння білінійної поверхні:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u,v) &= (1-u)\left[(1-v)\mathbf{P}_{0,0} + v\mathbf{P}_{0,1}\right] + u\left[(1-v)\mathbf{P}_{1,0} + v\mathbf{P}_{1,1}\right] = \\ &= \left[\begin{array}{c} (1-u)(1-v) \\ u(1-v) \\ (1-u)v \\ uv \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} \\ \mathbf{P}_{1,0} \\ \mathbf{P}_{0,1} \\ \mathbf{P}_{1,1} \end{bmatrix}; \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Можна переконатися, що задані точки дійсно розташовані у кутах білінійної поверхні, якщо підставити відповідні комбінації нулів і одиниць у рівняння (3.7). Це рівняння свідчить також про те, що білінійна поверхня є сполученням кутових точок за допомогою функцій сполучення $(1-u)(1-v)$, $u(1-v)$, $(1-u)v$, uv . Через те, що ці функції сполучення є лінійними за відповідними параметрами, білінійна поверхня зазвичай є плоскою.

3.3. Кусок Куна

Сполучення кутів дає білінійну поверхню. Сполучення граничних кривих довільної форми дає поверхню, що називають *шматком Куна* (*Coon's patch*). Слово «шматок» вказує на те, що описувана поверхня є сегментом, який відповідає значенням параметрів $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. Комбінування шматків дозволяє утворити поверхню довільної форми і розміру.

Рівняння куску Куна виводять в такий спосіб. Припустимо, що відомі рівняння чотирьох граничних кривих (рис. 3.2): $\mathbf{P}_0(v)$, $\mathbf{P}_1(v)$, $\mathbf{Q}_0(u)$ і $\mathbf{Q}_1(u)$. Припустимо також, що напрямки кривих $\mathbf{Q}_0(u)$ і $\mathbf{Q}_1(u)$ збігається (на рис. 3.2 ці криві спрямовані вправо, що позначено стрілкою). Те ж припущення висловимо і відносно $\mathbf{P}_0(v)$ і $\mathbf{P}_1(v)$.

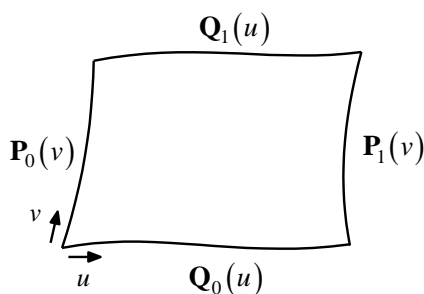


Рисунок 3.2 - Граничні криві, які визначають кусок Куна

Якщо граничні криві не задовольняють цим вимогам, то необхідно виконати їх перетворення до описаного вище виду. Напрямок і інтервал зміни параметру можна змінити інверсією або масштабуванням.

Криві, що задовольняють описаним вимогам, інтерполюються наступним чином.

Виберемо дві криві, розташовані навпроти, наприклад $\mathbf{P}_0(v)$ і $\mathbf{P}_1(v)$. Інтерполяцію цих кривих у напрямку u здійснюють лінійним рівнянням

$$\mathbf{P}_1(u, v) = (1 - u)\mathbf{P}_0(v) + u\mathbf{P}_1(v). \quad (3.8)$$

Поверхня, визначена рівнянням (3.8), обмежуватиметься кривою $\mathbf{P}_0(v)$ при $u = 0$ та кривою $\mathbf{P}_1(v)$ при $u = 1$. Дві інші межі будуть відрізками прямих, які з'єднують кутові точки. Переконайтеся в цьому можна, якщо підставити в рівняння (3.8) $v = 0$ або $v = 1$. Таким чином, отримана поверхня не обмежується кривими $\mathbf{Q}_0(u)$ і $\mathbf{Q}_1(u)$.

Визначимо другу поверхню, інтерполюючи $\mathbf{Q}_0(u)$ і $\mathbf{Q}_1(u)$ за напрямком v :

$$\mathbf{P}_2(u, v) = (1 - v)\mathbf{Q}_0(u) + v\mathbf{Q}_1(u). \quad (3.9)$$

Якщо підставити граничні значення u і v у рівняння (3.9), можна переконатися, що нову поверхню обмежуватимуть криві $\mathbf{Q}_0(u)$ і $\mathbf{Q}_0(v)$, але не $\mathbf{P}_0(v)$ або $\mathbf{P}_1(v)$. Визначимо ще одну поверхню $\mathbf{P}_3(u, v)$, склавши $\mathbf{P}_1(u, v)$ і $\mathbf{P}_2(u, v)$, і перевіримо, чи не буде вона обмежена необхідними кривими.

$$\mathbf{P}_3(u, v) = (1 - u)\mathbf{P}_0(v) + u\mathbf{P}_1(v) + (1 - v)\mathbf{Q}_0(u) + v\mathbf{Q}_1(u). \quad (3.10)$$

Підстановка граничних значень u і v у (3.10) дає:

$$\mathbf{P}_3(0, v) = \mathbf{P}_0(v) + (1 - v)\mathbf{Q}_0(0) + v\mathbf{Q}_1(0); \quad (3.11)$$

$$\mathbf{P}_3(1, v) = \mathbf{P}_1(v) + (1 - v)\mathbf{Q}_0(1) + v\mathbf{Q}_1(1); \quad (3.12)$$

$$\mathbf{P}_3(u, 0) = \mathbf{Q}_0(u) + (1 - u)\mathbf{P}_0(0) + u\mathbf{P}_1(0); \quad (3.13)$$

$$\mathbf{P}_3(u, 1) = \mathbf{Q}_1(u) + (1 - u)\mathbf{P}_0(1) + u\mathbf{P}_1(1). \quad (3.14)$$

Якщо $\mathbf{P}_3(u, v)$ задовольняє вимогам до граничних кривих, два правих доданки в рівняннях (3.11)-(3.14) повинні дорівнювати нулю. Ці доданки є інтерполяцією кінцевих точок відповідних граничних кривих. Інакше кажучи, доданки, які повинні дорівнювати нулю, описують межі білінійної поверхні. Отже, вірний вираз для куска Куна визначають вирахуванням рівняння білінійної поверхні від $\mathbf{P}_3(u, v)$:

$$\mathbf{P}(u, v) = (1-u)\mathbf{P}_0(v) + u\mathbf{P}_1(v) + (1-v)\mathbf{Q}_0(u) + v\mathbf{Q}_1(u) - \\ - (1-u)(1-v)\mathbf{P}_{0,0} - u(1-v)\mathbf{P}_{1,0} - (1-u)v\mathbf{P}_{0,1} - uv\mathbf{P}_{1,1}; \quad (3.15) \\ 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1.$$

Завдяки простоті концепції та рівнянь шматка Куна використовували досить широко. Однак він непридатний для точного моделювання поверхонь, оскільки форму поверхні не можна задавати лише одними її межами.

3.4. Бікубічний шматок

Бікубічний шматок (*bicubic patch*) - це поверхня, яку визначають поліноміальним рівнянням третього порядку за параметрами u і v :

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{a}_{i,j} u^i v^j; \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1. \quad (3.16)$$

Рівняння (3.16) можна переписати в матричній формі:

$$\mathbf{P}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

У рівняннях (3.17) \mathbf{a}_{ij} - алгебраїчні векторні коефіцієнти з компонентами x , y і z . Вплив цих коефіцієнтів на форму поверхні не є інтуїтивно зрозумілим. Заміну алгебраїчних коефіцієнтів на геометричні розглянуто в [2].

3.5. Поверхня Без'є

Концепцію кривої Без'є, що визначена багатокутником, який її задає, можна розширити на один вимір, у результаті чого вийде поверхня Без'є, яку визначають багатогранником, що її задає. Рівняння поверхні Без'є виглядає таким чином:

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} \mathbf{V}_{i,n}(u) \mathbf{V}_{j,m}(v); \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, \quad (3.18)$$

де $\mathbf{P}_{i,j}$ - радіус-вектори точок, які задають, що перебувають у вершинах багатогранника, який їх задає (рис. 3.3), а $\mathbf{V}_{i,n}$ і $\mathbf{V}_{j,m}$ - функції сполучення, звичайні для кривих Без'є.

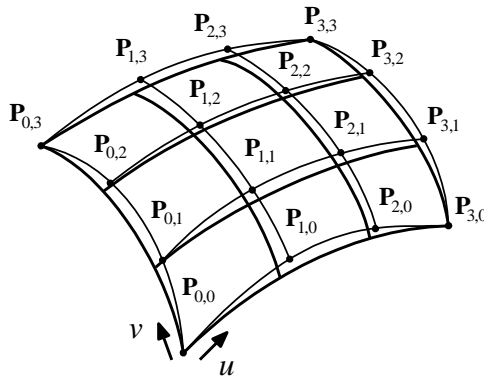


Рисунок 3.3 - Поверхня Без'є з багатогранником, що її задає

Таким чином, ступінь рівняння поверхні за u і v визначають кількістю точок, що її задають, у відповідних напрямках.

Рівняння (3.18) можна розкрити, записавши суму по j у явному виді:

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^n \left[\mathbf{P}_{i,0} \mathbf{V}_{0,m}(v) + \dots + \mathbf{P}_{i,m} \mathbf{V}_{m,m}(v) \right] \mathbf{V}_{i,n}(u). \quad (3.19)$$

Рівняння (3.19) ілюструє, що поверхня Без'є утворена сполученням $n + 1$ кривих Без'є, кожна з яких визначають точками $\mathbf{P}_{i,1}, \mathbf{P}_{i,2}, \dots, \mathbf{P}_{i,m}$, що їх задають, які між собою сполучені функціями $\mathbf{V}_{i,n}(u)$. Можна показати, що ту ж поверхню Без'є утворюють при сполученні $m + 1$ кривих Без'є, визначених точками $\mathbf{P}_{0,j}, \mathbf{P}_{1,j}, \mathbf{P}_{2,j}, \dots, \mathbf{P}_{n,j}$, що їх задають, і функціями $\mathbf{V}_{j,m}(v)$. Отже, поверхню Без'є можна утворити, якщо точки кривої Без'є, що її задають, замінити кривими Без'є.

Ступінь поверхні Без'є визначають кількістю точок, що її задають. Рівняння поверхонь високих ступенів мають ті ж недоліки, що й рівняння кривих високих ступенів, тому при моделюванні поверхонь завичай використовують поверхні Без'є ступеня 3 за u і v , так само як при моделюванні кривих використовувалися криві Без'є ступеня 3. У разі необхідності моделювання складної поверхні доводиться створювати декілька поверхонь Без'є третього ступеня та з'єднувати їх між собою. Поверхні повинні бути з'єднані таким чином, щоб забезпечити безперервність на межі, по якій здійснюють з'єднання. Це досягають накладенням обмежень на точки, що задають, які розташовані ліворуч і праворуч від межі. Обмеження полягає у тому, що ці точки повинні лежати на прямій, що проходить через точку, яка її задає та лежить на загальній межі (рис. 3.4). Якщо ця вимога виконується, перша похідна виявляється безперервною у всіх точках межі.

Детальний розгляд властивостей поверхні Без'є наведено в [1, 2] та ін.

3.6. В-сплайнова поверхня

Подібно тому, як від рівняння кривої Без'є ми перейшли до рівняння поверхні Без'є, можна перейти й від рівняння В-сплайну до рівняння В-сплайнової поверхні:

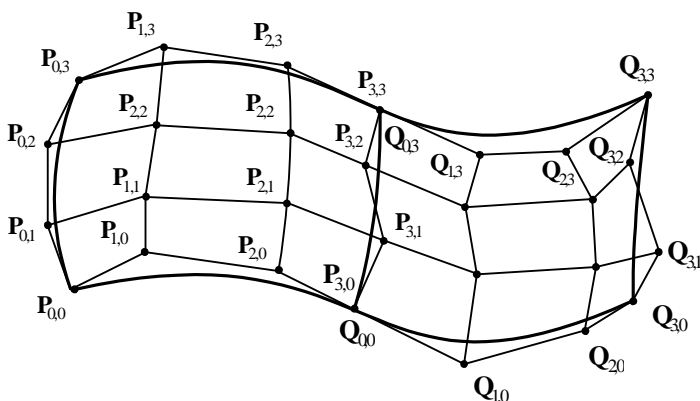


Рисунок 3.4. Об'єднання лоскутів Без'є

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v); \quad (3.20)$$

$$s_{k-1} \leq u \leq s_{n+1}, t_{l-1} \leq v \leq t_{m+1},$$

де $\mathbf{P}_{i,j}$ - точки, які її задають, розташовані у вершинах багатогранника, що її задає, як і для поверхні Без'є, а $N_{i,k}(u)$ та $N_{j,l}(v)$ - функції сполучення, використовувані для побудови В-сплайнів.

Ці функції сполучення визначають вузловими значеннями s_0, s_1, \dots, s_{n+k} і t_0, t_1, \dots, t_{l+m} відповідно. Діапазони параметрів використовують у визначенні В-сплайну, оскільки функції сполучення $N_{i,k}(u)$ і $N_{j,l}(v)$ визначені тільки на цих інтервалах. Це вірно як для періодичних вузлів, так і для неперіодичних. Розглядатимемо тільки неперіодичні вузли. У цьому випадку функції сполучення В-сплайну збігатимуться з функціями сполучення поверхні Без'є, якщо $k = n + 1, l = m + 1$.

Тому можна стверджувати, що поверхня Без'є є лише окремим випадком В-сплайнової поверхні, а рівняння (3.20) описує як поверхні Без'є, так і В-сплайнові. Найчастіше порядки k і l приймаються рівними 4, оскільки ступені рівнянь, що описують поверхні, не повинні перевищувати 3.

В-сплайнова поверхня з неперіодичними вузлами має властивості, що подібні до поверхні Без'є (наприклад, чотири кути багатогранника, що задає, лежать на поверхні, а граничні криві є В-сплайнами, які визначають відповідними підмножинами точок, що їх задають).

3.7. Поверхня NURBS

Переходячи до однорідних координат точок, які задають, з рівняння В-сплайну одержимо рівняння NURBS-кривої (NURBS - неоднорідний раціональний В-сплайн). Так само рівняння поверхні NURBS утворюють з В-сплайнової поверхні:

$$\mathbf{P}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m h_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m h_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)}; \quad (3.21)$$

$$s_{k-1} \leq u \leq s_{n+1}, t_{l-1} \leq v \leq t_{m+1}$$

де $\mathbf{P}_{i,j}$ - вектори точок, які задають, з компонентами x , y та z , а $h_{i,j}$ – однорідні координати точок, які задають.

Зверніть увагу, що вузлові значення та діапазони значень параметрів співпадають із зазначеними у формулі (3.20).

Рівняння (3.21) стає рівнянням В-сплайнової поверхні при $h_{i,j} = 1$. При $h_{i,j} = 1$ знаменник (3.21) тотожно дорівнює одиниці. Отже, рівняння В-сплайнової поверхні є окремим випадком рівняння NURBS-поверхні. Поверхня NURBS до того ж дозволяє точно описати квадратичні поверхні, такі як циліндр, конус, сфера, параболоїд і гіперболоїд. Ці поверхні називають квадратичними, тому що їх рівняння мають ступінь 2 за u і v .

Рівняння NURBS-поверхні часто використовують для внутрішнього представлення квадратичних поверхонь у системах геометричного моделювання.

3.8. Способи побудови поверхонь

Найпоширеніші способи побудови поверхонь [1] наведені на рис. 3.5, який відображає процес побудови поверхонь при читанні його зліва направо.

Первісно поверхні можуть бути побудовані або за місцевою системою координат і скалярних параметрів, або за характерними точками, або на основі ліній. Далі ці поверхні можуть бути продовжені або зрізані, на їх основі можуть бути отримані еквідистантні поверхні. Всі згадані поверхні мають прямокутну або трикутну область визначення параметрів. На базі поверхонь із прямокутною або трикутною областю визначення параметрів можна побудувати обмежені контурами поверхні довільної форми.



Рисунок 3.5 – Способи побудови поверхонь

3.9. Перетинання поверхонь

Розглянемо обчислення кривих перетину поверхонь. Через внутрішні обмеження чисельних методів шукатимемо точки на кривих перетину. Криві перетину поверхонь необхідні для реалізації булевих операцій. Криві перетину потрібні також для реалізації відсікання поверхонь іншими поверхнями у системах поверхневого моделювання. Коротко викладемо основні ідеї, що лежать в основі алгоритмів для розрахунку кривих перетину поверхонь, заданих параметричними рівняннями. Розглянемо тільки параметричні рівняння, оскільки саме їх найчастіше використовують для представлення поверхонь.

Методи розрахунку кривих перетину поверхонь можуть бути розділені на два класи.

Методи першого класу полягають у чисельному рішенні нелінійного рівняння:

$$\mathbf{P}(u, v) - \mathbf{Q}(s, t) = 0, \quad (3.22)$$

де $\mathbf{P}(u, v)$ і $\mathbf{Q}(s, t)$ - параметричні рівняння поверхонь, які перетинаються.

Рівняння (3.22) розкладається на три скалярних рівняння з чотирма невідомими: u , v , s і t . Вирішення цієї системи вимагає присвоєння довільного значення одному з параметрів. При цьому отримують значення параметрів, які відповідають точці на кривій перетину. Зміна обраного довільного значення дає всі інші точки кривої перетину. Недоліком цього методу є те, що його збіжність залежить від початкових наближень невідомих у рівнянні (3.22). Більш того, він не завжди дозволяє знайти всі криві перетину. Інакше кажучи, при великих інтервалах зміни параметру, що задають довільно, деякі криві можуть бути втрачені повністю, а деякі – частково.

Методи з другої категорії засновані на теорії послідовного розподілу. Кожну поверхню ділять послідовно на безліч частин доти, поки кожна з них не буде близькою до плоского чотирикутника. Потім чотирикутники однієї поверхні перевіряють на перетинання із чотирикутниками іншої поверхні. У результаті утворюються пари чотирикутників, що перетинаються, а точки прямих, по яких вони перетинаються, дають гарне початкове

наближення для рівняння (3.22). Однак може виявитися непросто перевіряти пари чотирикутників у вірній послідовності так, щоб точки перетинання утворювали криві. Методи, засновані на теорії послідовного розподілу, вимагають більшого обсягу обчислень у порівнянні з методами першого класу, проте вони рідше пропускають криві перетинання.

Більш докладно з цими питаннями можна ознайомитися в [1-5].

Питання для самостійного контролю.

1. Дайте короткий опис основних принципів моделювання поверхонь.

2. Які є основні типи рівнянь поверхонь?

3. Які є принципи побудови білінійної поверхні?

4. Які є принципи побудови куска Куна?

5. Які є принципи побудови бікубічного куска?

6. Які є принципи побудови поверхні Без'є?

7. Які є принципи побудови B-сплайнової поверхні?

8. Які є принципи побудови поверхні NURBS?

9. Наведіть класифікацію способів побудови поверхонь.

10. Які є особливості обчислення кривих перетинання поверхонь?

РОЗДІЛ 4. ТОПОЛОГІЯ ОБОЛОНОК

4.1. Топологічні об'єкти

Моделювання оточуючих нас предметів вимагає залучення більш складних геометричних об'єктів, ніж точки, криві і поверхні. За допомогою тільки однієї поверхні в загальному випадку неможливо описати геометричну форму деякого конкретного предмету, але це можна зробити за допомогою декількох поверхонь, зв'язавши їх певним чином. Те, яким чином поверхні будуть зв'язані між собою, створює додаткову інформацію для нових об'єктів, які побудовані на основі вже розглянутих геометричних об'єктів. Нашою метою є одержання геометричної моделі навколишніх предметів. Всі ці предмети займають деяку частину простору, або, інакше кажучи, займають кінцевий обсяг простору. Для їх моделювання потрібно описати сукупність поверхонь, що відокремлюють внутрішній об'єм предмета від іншої частини простору. Для цього потрібен набір певним чином побудованих і зрізаних поверхонь та інформація про взаємний зв'язок цих поверхонь, тобто, як одна поверхня переходить в іншу.

4.1.1. Оболонки

Поверхні можуть бути замкнутими за одним або двома параметричними напрямками, або незамкнутими. Незамкнуті поверхні мають межу. *Межею* називатимемо лінію на поверхні, яка відповідає руху її параметрів по межі їх області визначення. Лінію на замкнутій поверхні, по якій вона замикається сама на себе, будемо називати швом. Поверхні можуть стикуватися одна з одною по межах. Можна сказати, що по шву замкнута поверхня стикується сама із собою. Сукупність поверхонь, що стикуються по межах, називатимемо оболонкою. Оболонка може складатися з однієї поверхні або декількох поверхонь. Також як і окрема поверхня, оболонка може бути замкнутою й незамкнутою. Замкнута оболонка не має межі. Незамкнута оболонка має одну або кілька меж.

У попередніх розділах розглянуті геометричні властивості кривих і поверхонь шляхом визначення їх кількісних характеристик (довжин та кутів). У даному розділі нас будуть

цікавити властивості геометричних об'єктів, які не залежать від кількісних характеристик. Розглядатимемо безперервний зв'язок між точками геометричних об'єктів. Припустимо, що оболонка виконана з еластичного матеріалу, що не розривається і не склеюється. Досліджуймо властивості цієї оболонки, які зберігаються при всіляких її деформаціях. *Деформацією* називатимемо зміну форми оболонки шляхом розтягування, стиску, зсуву або вигину її поверхні, які не призводять до розривів і не потребують склеювання поверхонь оболонки. Наприклад, еластична оболонка у вигляді кубу може бути деформована в сферу, еліпсоїд, або оболонку у вигляді тетраедру, але не може бути деформована в тороїдальну оболонку. Сфера, еліпсоїд, оболонка у вигляді тетраедру або кубу можуть бути перетворені один в другий шляхом безперервних і зворотніх відображень.

Властивості геометричних об'єктів, які зберігаються при безперервних і зворотніх відображеннях одного простору в інший, вивчає наука *топологія*. З топологічної точки зору сфера, еліпсоїд, оболонка у вигляді тетраедру або кубу еквівалентні. Властивості, які характеризують безперервність точок деякої оболонки, є топологічними властивостями. Незважаючи на уявну невизначеність, топологічні властивості геометричних об'єктів пов'язані з фундаментальними математичними поняттями.

Топологія вивчає загальний випадок оболонок, які можуть самоперетинатися, мати або не мати межі, іти в нескінченність. Топологія оперує своїми об'єктами, які несуть інформацію про їх взаємний зв'язок, і встановлює між ними співвідношення. При моделюванні навколишніх нас об'єктів будуватимемо оболонки з *топологічних об'єктів*. Вони нестимуть і кількісну геометричну інформацію, і топологічну інформацію. Кількісна геометрична інформація топологічного об'єкту міститься у його геометричному носії, яким може бути точка, крива або поверхня. В даному розділі зосередимо увагу на топологічних властивостях об'єктів, які моделюють.

4.1.2. Вершини, ребра, цикли, грані

Розглянемо оболонки, побудовані на основі поверхонь у тривимірному евклідовому просторі. Для відстеження зв'язків, які

складають оболонку поверхонь, доповнимо поверхні інформацією про ці зв'язки та введемо топологічні об'єкти. Топологічні об'єкти нестимуть одночасно метричну і топологічну інформацію. Одним з топологічних об'єктів є оболонка.

При побудові оболонки використовуватимемо такі топологічні об'єкти, як грані, ребра, вершини і цикли (рис. 4.1). Всі топологічні об'єкти мають загальні принципи побудови.

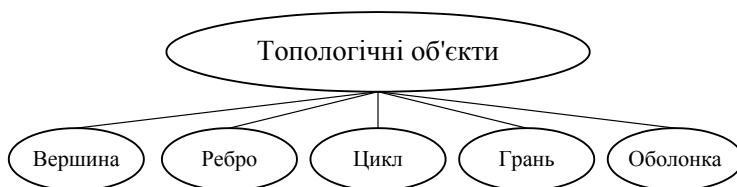


Рисунок 4.1 - Топологічні об'єкти

Гранню називатимемо топологічний об'єкт, який побудований на основі поверхні. Фактично грань є поверхнею плюс інформація про те, яка сторона поверхні є зовнішньою стороною грані, і інформація про її положення в оболонці, тобто інформація про її сусідів. Інформацію про сусідні грані оформлюють у вигляді циклів.

Цикл - це топологічний об'єкт, що описує одну із меж грані, і містить інформацію про те, де і як до даної грані примикають сусідні грані. Оскільки уздовж одного циклу до даної грані можуть примикати кілька сусідніх граней, то цикл складається з декількох ділянок. Кожна ділянка циклу опирається на деяке ребро.

Ребром називатимемо топологічний об'єкт, який побудований на основі лінії стикування сусідніх граней або на основі межової лінії оболонки. Грані стикуються тільки по ребрах. Таким чином, кожна грань з усіх боків оточена ребрами. *Вершиною* називатимемо топологічний об'єкт, який побудований на основі точки, у якій стикуються ребра. Вершини можуть лежати тільки на краях ребер. Кожне ребро починається і кінчається у вершині.

Якщо ребро замкнuto, то воно починається і кінчається в одній і тій же вершині. Цикл складається з ребер, що утворять замкнуту лінію уздовж однієї з меж грані. Цикл завжди замкнутий і

йому приписують певний напрямок. Грань може містити кілька циклів, причому один з них є зовнішнім, а інші – внутрішніми, які цілком лежать всередині зовнішнього циклу. За позитивний напрямок циклу приймається напрямок руху уздовж циклу, за яким грань завжди знаходиться ліворуч, якщо дивитися з зовнішньої сторони грані. Таким чином, зовнішній цикл грані орієнтовано проти годинникової стрілки, а внутрішні цикли – за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з зовнішньої сторони грані.

Кожний цикл проходить по одній з меж поверхні. На рис. 4.2 наведено приклад грані з її циклами.

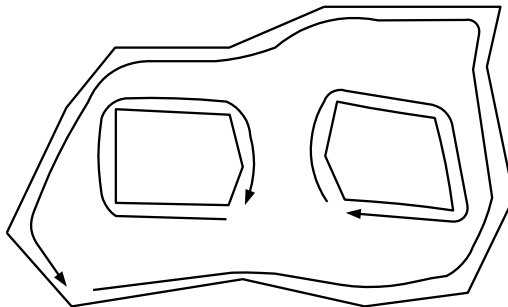


Рисунок 4.2 - Орієнтація зовнішнього та внутрішнього циклів грані

Грані, ребра та вершини будують на базі відомих геометричних об'єктів (точок, кривих і поверхонь) додаванням до них інформації про своїх сусідів і про взаємну орієнтацію. У результаті геометричні об'єкти набувають нову якість, чим і обумовлено введення топологічних об'єктів.

4.2. Ейлерова характеристика оболонок

Топологічні властивості оболонки можуть бути виражені через кількість її граней, ребер, вершин і циклів. Нехай оболонка містить F граней, E ребер, V вершин і L циклів. Число вершин, ребер, граней і циклів оболонки зв'язано між собою співвідношенням

$$F - E + V + (F - L) = H, \quad (4.1)$$

де величина H – *ейлерова характеристика оболонки*.

Формула (4.1) носить ім'я *формули Ейлера*. Якщо кожна грань оболонки має один цикл, то $F - L = 0$ і доданок у дужках в лівій частині (4.1) можна опустити. Ту саму оболонку можна побудувати з різного набору граней. Наприклад, сферичну оболонку можна побудувати із двох півсфер або з декількох сферичних сегментів подібно футбольному м'ячу. Як буде видно далі, ейлерова характеристика оболонки не залежить від числа й форми граней, що її складають, проте залежить від природних характеристик оболонки, які вивчає топологія.

Розглянемо, як змінюється ейлерова характеристика оболонки при зміні складових її елементів. Для цього змінюватимемо склад граней, ребер і вершин деякого фрагменту оболонки, не змінюючи складу іншої частини оболонки.

За бажанням оболонкою можна вважати тільки показаний на рисунках 4.3 і 4.4 фрагмент. На рис. 4.3 показано фрагмент оболонки, у якого ліквідують одне ребро. З рисунку видно, що при ліквідації одного ребра число граней, число ребер і число циклів зменшується на одиницю, а ейлерова характеристика оболонки не змінюється.

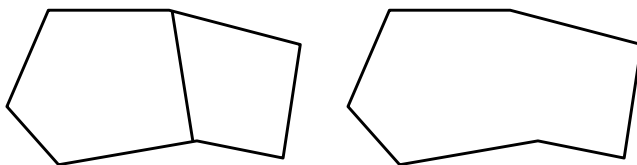


Рисунок 4.3 - Ейлерова характеристика не змінюється при ліквідації ребра оболонки

Якщо об'єднати два ребра, ліквідувавши спільну для них вершину, то число ребер і вершин оболонки зменшиться на одиницю. Якщо розрізати ребро на дві частини, вставивши вершину, то число ребер і вершин оболонки збільшиться на одиницю. Ейлерова характеристика оболонки в обох випадках не зміниться. При введенні одного додаткового ребра між існуючими вершинами число граней, число циклів і число ребер збільшиться на одиницю.

При введенні додаткового ребра з додаванням двох нових

вершин на його кінцях число граней і циклів збільшується на одиницю, число ребер збільшується на три через розподіл двох існуючих ребер на дві частини й додавання нового ребра, а ейлерова характеристика оболонки не змінюється, що показано на рис. 4.4.

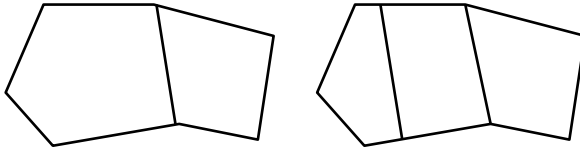


Рисунок 4.4 - Ейлерова характеристика не змінюється при додаванні ребра в оболонку

Ейлерова характеристика оболонки не змінюється і при введенні одного додаткового ребра, що з'єднає існуючу вершину та нову вершину, яка ділить існуюче ребро на два ребра.

У наведених прикладах всі грані не змінювали число циклів, що їх обмежують, а всі нові грані мали один цикл. У загальному випадку грань може мати вирізи всередині.

Грань з вирізами з топологічної точки зору відрізняється від грані без вирізів, тому що першу не можна перетворити в другу шляхом деформування. Число вирізів у грані також відіграє істотну роль.

Топологічно еквівалентними є грані, які шляхом деформування можуть бути перетворені одна в іншу. Для цього грані повинні мати однакове число вирізів або однакове число циклів.

На рис. 4.5 показано додавання нової грані в оболонку шляхом введення замкнутого ребра, яке повністю лежить всередині грані.

Число граней, ребер і вершин при цьому збільшиться на одиницю, а число циклів збільшиться на два (цикл на доданому замкнутому ребрі потрібно рахувати двічі: один раз в одній грані, другий раз - в іншій грані). Ейлерова характеристика оболонки при цьому також не зміниться. Ейлерова характеристика оболонки не зміниться, якщо ми перетворимо грань із двома циклами в грань з одним циклом (рис. 4.6).

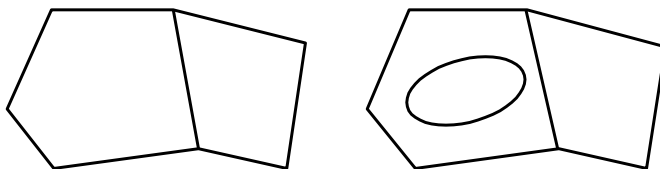


Рисунок 4.5 - Додавання грані та двох циклів в оболонку

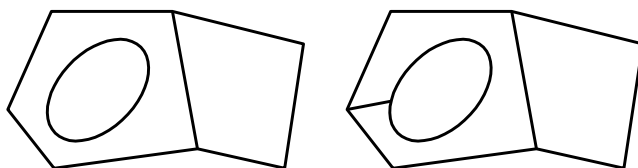


Рис. 4.6 - Додавання ребра і ліквідація внутрішнього циклу грані

Покажемо це. Нехай нове ребро починається і кінчається у вершинах, які вже існують, тоді число ребер збільшиться на одиницю, число циклів зменшиться на одиницю, а ейлерова характеристика не зміниться.

Всі перераховані модифікації оболонки не змінюють її ейлерової характеристики. Це ілюструє те, що ейлерова характеристика не залежить від способу розбивки оболонки на грані, а залежить тільки від природи оболонки.

Розглянемо ще один приклад, який показує, що ейлерова характеристика залежить від топології оболонки і не залежить від способу розкряю її на грані. Візьмемо оболонку у формі чотирикутної призми й перетворимо її на оболонку у формі чотирикутної призми із чотирикутним отвором (рис. 4.7).

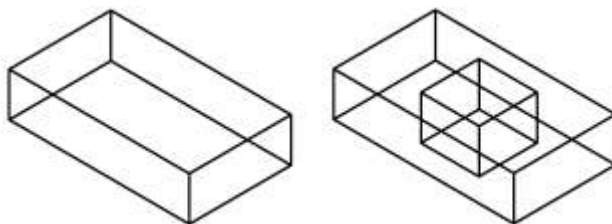


Рис. 4.7 - Ейлерова характеристика оболонок різна

Початкова оболонка мала наступні числа граней, циклів, ребер і вершин: $F = 6$, $L = 6$, $E = 12$, $V = 8$, а її ейлерова характеристика дорівнювала $H = 2$. Нова оболонка має: граней $F = 10$, циклів $L = 12$, ребер $E = 24$, вершин $V = 16$, а її ейлерова характеристика дорівнює $H = 0$. У двох гранях збільшилося число циклів (було по одному циклу, а стало по два).

Ейлерова характеристика нової оболонки зменшилася на дві одиниці. Повторимо перехід від тієї ж призматичної оболонки до призматичної оболонки з вирізом, тільки верхню та нижню грань початкової оболонки представимо у вигляді сукупності дев'яти граней, як показано на рис. 4.8.

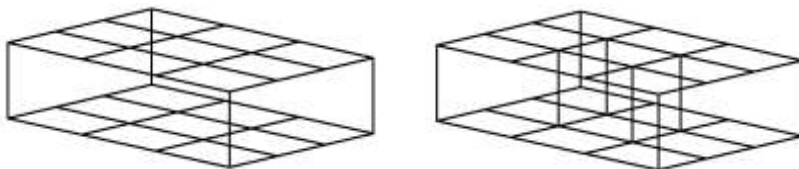


Рисунок 4.8 - Ейлерова характеристика оболонок різна

Початкова оболонка мала наступні числа граней, циклів, ребер і вершин: $F = 22$, $L = 22$, $E = 52$, $V = 32$, а її ейлерова характеристика дорівнювала $H = 2$. Нова оболонка має: граней $F = 24$, циклів $L = 24$, ребер $E = 56$, вершин $V = 32$, а її ейлерова характеристика дорівнює $H = 0$. Всі грані у початковій і новій оболонках мають по одному циклу. Ейлерова характеристика нової оболонки, як і у попередньому прикладі, зменшилася на дві одиниці.

Це відбулося в результаті того, що ми одержали оболонку, яка топологічно нееквівалентна початковій оболонці. Дійсно, якщо уявити, що обидві оболонки, які показані на рис. 4.7, виконані з легко деформовуваного матеріалу, то після скруглення кутів, з першої оболонки одержимо сферу, а з другої – тор (рис. 4.9).

Ніякими деформаціями неможливо зі сфери одержати тор - вони мають різну топологію.

Ейлерова характеристика оболонки відображає її природні властивості, пов'язані з можливістю деформувати одну оболонку в іншу або, інакше кажучи, установити між ними взаємно

однозначну відповідність. Для опису топологічних властивостей оболонок і їх граней використовують поняття зв'язності. Оболонки однакової зв'язності можуть бути деформовані одна в іншу за умови, що вони мають рівне число меж і однакою *орієнтовність*.



Рисунок 4.9 - Сфера і тор мають різну топологію

4.3. Зв'язність оболонок

Розглянемо топологічні властивості оболонок. Ці властивості не залежать від кількісних характеристик (обсягу, площі поверхні і т.п.). Не звертатимемо уваги на ребра і вершини, а сприйматимемо оболонку як єдине ціле. Уявимо, що оболонка виконана з легко деформовуваного матеріалу, який не розривається і не склеюється. Можливо змінити форму оболонки, але до певних меж.

Наприклад, якщо оболонка має форму кулі, то їй можна надати форму кубу або тарілки, але не можна надати форму тору або глечика з ручкою. Це пов'язано з тим, що куля, куб і тарілка мають однакою топологію, яка відрізняється від топології тору і глечика з ручкою. Топологічною характеристикою описаної властивості оболонок є зв'язність. У наведеному прикладі оболонки з формою кулі, куба або тарілки, мають ту ж саму зв'язність, яка відрізняється від зв'язності оболонки з формою тору або глечика з ручкою. Оскільки топологія характеризує безперервний зв'язок точок об'єктів, то для визначення топологічних властивостей варто вивчити поведку топологічних об'єктів при поділі їх на частини.

Зв'язність – це топологічне поняття, яке характеризує цілісність деякого об'єкту. З іншого боку зв'язність відображає можливість розділити деякий топологічний об'єкт на окремі частини. Найпростішою є незамкнута оболонка з однією межею (одним циклом) топологічно еквівалентна колу. Якщо представити,

що оболонки виконані з легко деформовуваного матеріалу, то найпростішою є оболонка, якій шляхом деформування можна надати плоску форму з межею у вигляді кола. Прямокутна, еліптична, будь-яка плоска оболонка з однією межею є найпростішою. Розглянемо питання: яке мінімальне число ліній можна провести на поверхні оболонки, щоб по цих лініях її можна було б розрізати на дві найпростіші? Найпростіша оболонка ділиться на дві окремі частини будь-якою лінією, проведеною від однієї точки межі до іншої. Найпростішій оболонці приписують зв'язність, яка дорівнює одиниці. Її називають *однозв'язною*.

Розглянемо незамкнуті оболонки, що мають кінцеве число циклів (меж), які шляхом деформування без склеювання і накладень можна зробити плоскими.

На рис. 4.10 наведено приклади плоских оболонок з різним числом циклів. Якщо плоска оболонка має L циклів (один зовнішній і $L - 1$ внутрішніх), то на ній можна провести $L - 1$ ліній, що не розріжуть оболонку на дві окремі частини (наприклад, від зовнішнього циклу до кожного внутрішнього циклу). Будь-яка наступна лінія, яка починається і кінчається на межі оболонки, розріже її на дві частини. Плоска оболонка з вирізами має додаткові зв'язки, які ріжуть, а оболонка не втрачає свою цілісність. Цілісність оболонки полягає у тому, що з деякої її точки, рухаючись по її поверхні, можна потрапити в будь-яку іншу її точку. Плоскій оболонці з L циклами припишемо зв'язність рівну L .

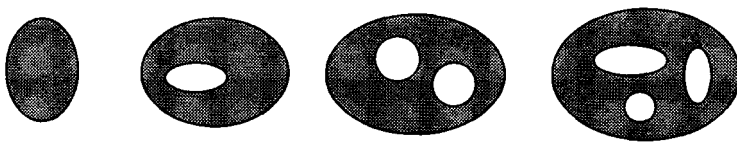


Рисунок 4.10 - Плоскі оболонки різної зв'язності

Зв'язність оболонки визначимо мінімальним числом ліній, по яких її можна розрізати на дві найпростіші оболонки (на дві окремі частини). Якщо зв'язність оболонки дорівнює h , то $h - 1$ розрізів досить, щоб ними розкrojіти оболонку, перетворивши її до найпростішої. Зв'язність позначимо через h .

Розглянемо замкнуті оболонки. На оболонці як на поверхні

можна вільно будувати криві лінії. Припустимо, що можна різати оболонку по кривих на ній. Якщо оболонка має топологію сфери, то по будь-якій замкнутій кривій на її поверхні оболонку можна розрізати на дві окремі частини, які є однозв'язними оболонками. Якщо оболонка має топологію тору, то для розкрою її в однозв'язну грань, потрібно, як мінімум, дві замкнуті криві на ній. Спосіб розкрою тороїдальної оболонки показано на рис. 4.11.

Використовуючи наведене визначення, одержимо, що зв'язність сфери дорівнює одиниці, а зв'язність тору – трьом.

На замкнутій оболонці зв'язності h можна побудувати $h - 1$ замкнутих кривих, які не порушують її цілісності (які не розріжуть її на окремі частини), але не можна побудувати h таких кривих. Для того, щоб замкнуту оболонку зв'язності h розкрити в однозв'язну оболонку, її потрібно розрізати по $h - 1$ замкнутих лініях.

Ці лінії не розріжуть оболонку на дві окремі частини, але будь-яка сукупність, що складається з h замкнутих кривих на оболонці, обов'язково розріже оболонку на дві частини.

Розглянуті замкнуті оболонки мають непарну зв'язність. Існують оболонки парної зв'язності. Парну зв'язність можуть мати незамкнуті оболонки. Наприклад, циліндрична оболонка кінцевої довжини має зв'язність рівну двом. Дійсно, лінія, що проходить від однієї межі до іншої, не розріже циліндричну оболонку на окремі частини, а тільки розкроює її в однозв'язну оболонку (рис. 4.12). Будь-яка інша лінія, що проходить від однієї межі до іншої, розріже циліндричну оболонку на частини.



Рисунок 4.11 - Розкрій тороїдальної оболонки



Рисунок 4.12 - Розкрій циліндричної оболонки

На рис. 4.13 показано незамкнуті оболонки, отримані із замкнутих оболонок, якщо в них зробити отвір. Якщо в замкнутій оболонці зв'язності h виконати один отвір з однією замкнутою межею, то зв'язність отриманої незамкнутої оболонки дорівнюватиме зв'язності початкової замкнутої оболонки. Кожний наступний отвір з однією замкнутою межею збільшуватиме зв'язність отриманої оболонки на одиницю. Зв'язність представлених на рис. 4.13 незамкнутих оболонок відповідно дорівнює 1, 4, 3, 6. Систему розрізів на цих оболонках будують аналогічно системі розрізів на відповідній замкнутій оболонці, тільки частину ліній проводять від однієї межі до іншої.



Рисунок 4.13 - Незамкнуті оболонки

Зв'язність не є єдиною характеристикою оболонки. Дві оболонки можуть мати однакову зв'язність, але бути топологічно різними. Крім зв'язності оболонку характеризують *орієнтовністю*.

4.4. Орієнтовність оболонок

Для багатьох замкнутих оболонок одну зі сторін можна визначити як внутрішню, а іншу - як зовнішню. Для точок оболонок вводять таке топологічне поняття як орієнтовність. Представимо, що навколо будь-якої точки оболонки проведено коло досить малого радіусу, що розташоване на поверхні оболонки. Для кожного кола визначимо такий напрямок обходу, за яким досить близькі точки завжди будуть обходитися в тому самому напрямку. Якщо для деякої оболонки це можна зробити, то таку оболонку називатимуть орієнтовуваною. Існують оболонки, для яких не можна ввести єдиний напрямок обходу для кіл близьких

точок. Такі оболонки називають неорієнтованими.

4.4.1. Лист Мебіуса

Прикладом неорієнтованої оболонки є лист Мебіуса, показаний на рис. 4.14. Лист Мебіуса одержують, взявши паперову стрічку та склеївши далекі краї, повернувши попередньо їх одини відносно іншого на 180° . До склеювання країв стрічки її сторони можна пофарбувати у два різні кольори. Якщо фарбування проводити після склеювання, то виявиться, що ми зафарбуємо одним кольором обидві боки. При русі по листу Мебіуса пройдемо по обох його боках.

Для точок листа Мебіуса не можна визначити орієнтацію. Дійсно, задавши для малого кола орієнтацію деякої точки і рухаючись по оболонці, потрапимо у початкову точку, але з протилежним напрямком. Результатом цього є неможливість пофарбувати різні боки оболонки у різні кольори. В оболонці всього один бік. Лист Мебіуса є однобічною оболонкою. Якщо оболонка є однобічною, то вона неорієнтована. Справедливим є твердження, що якщо оболонка є двобічною, то вона орієнтована.

Оболонка тоді і тільки тоді неорієнтована, коли на ній можна побудувати таку замкнуту криву s , що при русі досить малого орієнтованого кола уздовж цієї кривої воно прийде у початкову точку орієнтованим у протилежному напрямку.

Якщо рухатися уздовж кривої s на однобічній оболонці по одну сторону від цієї кривої, то можна потрапити на іншу сторону кривої, хоча під час руху крива не перетиналася.



Рисунок 4.14 - Лист Мебіуса - однобічна незамкнута оболонка



Рисунок 4.15 - Орієнтована самоперетинна незамкнута оболонка

оболонка

Лист Мебіуса є незамкнутою оболонкою. Існують замкнуті однобічні оболонки. Однобічна оболонка не може розбити простір на внутрішню й зовнішню частини, тому однобічна замкнута оболонка завжди перетинає сама себе. Однак не всяка самоперетинна оболонка є однобічною. Оболонку, яка самоперетинається, але не є однобічною, представлено на рис. 4.15.

4.3.2. Пляшка Клейна

Прикладом замкнутої однобічної оболонки є пляшка Клейна, яку показано на рис. 4.16. Пляшка Клейна має одну замкнуту лінію самоперетинання. Вона не може бути посудиною. Зв'язність пляшки Клейна дорівнює трьом. Система ліній, що розріжуть пляшку Клейна на дві однозв'язкових частини, аналогічна системі ліній тору.

Якщо пляшку Клейна розрізати площиною її симетрії, то одержимо дві незамкнуті самоперетинні оболонки, з яких шляхом деформування можна одержати два листи Мебіуса.

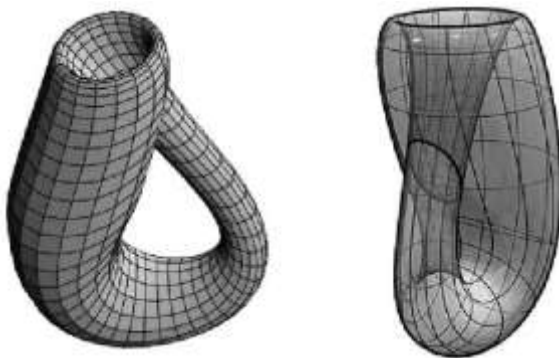


Рисунок 4.16 - Пляшка Клейна - однобічна замкнута оболонка

4.3.3. Гептаедр

Ще однією однобічною оболонкою є гептаедр. Його можна одержати з октаедру. Для цього видалимо чотири грані з восьми: на верхній частині октаедру - ліву передню і праву задню, а на нижній частині - праву передню і ліву задню грані, і додамо три квадратні

взаємно ортогональні грані, побудовані на діагоналях октаедру. Оболонка гептаедру складається із семи граней. Ребра і вершини гептаедру збігаються з ребрами і вершинами октаедру (діагоналі не вважаються ребрами, а є лініями самоперетинання оболонки). У кожному ребрі гептаедру стикаються тільки дві грані. Гептаедр є замкнутою однобічною оболонкою парної зв'язності. Він представлений на рис. 4.17.

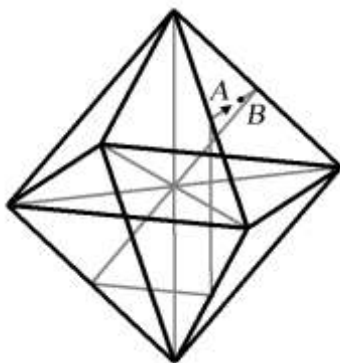


Рисунок 4.17 - Гептаедр (семигранник) - самоперетинна однобічна оболонка

Якщо почати рух по поверхні гептаедру із точки А, то, рухаючись по зазначеній на рис. 4.17 траєкторії, потрапимо в точку В, розташовану на іншому боці поверхні.

Таким чином, крім зв'язності, оболонки характеризуються ще й орієнтовністю. Тор і пляшка Клейна мають однакову зв'язність, замкнуті оболонки, але тор є орієнтованою оболонкою, а пляшка Клейна - неорієнтованою.

Відомі ще декілька неорієнтованих оболонки. Замкнуті неорієнтовані оболонки перетинають самі себе і тому не можуть бути використані для моделювання деталей. Оболонки, з якими найчастіше мають справу в реальності, є орієнтованими. Проте, неорієнтовані оболонки з математичної точки зору рівноправні з орієнтованими.

4.5. Оболонки для моделювання тіл

Розглянемо взаємно однозначне і безперервне відображення однієї оболонки на іншу. При цьому відображенні сусідні точки залишаються сусідніми.

Таке відображення може спотворювати оболонку, але при цьому зв'язані частини залишаються зв'язаними. Одним з видів відображення є деформація. При деформації топологічний об'єкт як ціле безупинно переходить сам у себе.

Рух оболонки в просторі є окремим випадком деформації, тоді як дзеркальне відображення оболонки відносно площини не є деформацією. При дзеркальному відображенні змінюється на зворотний напрямок обходу всякої замкнутої кривої на оболонці, а деформація зберігає напрямок обходу незмінним.

Все різноманіття оболонок можна класифікувати з топологічної точки зору. До одного і того ж типу відносять оболонки, які топологічно можуть бути безперервно і взаємно однозначно відображені одна на іншу. Для цього повинні бути виконані наступні умови:

- 1) оболонки повинні мати однакову зв'язність;
- 2) оболонки повинні бути орієнтованими, або неорієнтованими;
- 3) оболонки повинні бути замкнутими, або мати однакове число меж.

Ці три необхідних умови безперервного і взаємно однозначного відображення двох оболонок також є і достатніми умовами.

Природно, що оболонки, які мають різне число меж, не можуть бути відображені одна на іншу.

Зв'язність обумовлює існування системи розрізів оболонки, що при топологічному відображенні переходить у систему розрізів такої ж структури на іншій оболонці. Отже, оболонки різної зв'язності не можуть бути відображені одна на іншу.

Можна довести, що всяка оболонка, яку можна відобразити на орієнтовану оболонку, також є орієнтованою. Це визначає третю умову приналежності оболонок до одного типу.

Оболонки, що мають однакову зв'язність, орієнтованість і число меж, є топологічно еквівалентними.

Формула Ейлера-Пуанкаре. Замкнуті, орієнтовані оболонки, що не перетинають самі себе, мають непарну зв'язність. Для таких оболонок ейлерова характеристика H пов'язана з її зв'язністю h співвідношенням

$$H = 3 - h. \quad (4.2)$$

Використовуючи це співвідношення, одержимо формулу, що зв'язує число граней F , число циклів L , число ребер E і число вершин V оболонки з її зв'язністю h :

$$F - E + V + (F - L) = 3 - h. \quad (4.3)$$

Даний запис формули Ейлера справедливий для замкнутих оболонок.

Зв'язність не є досить зручною для характеристики замкнутої оболонки. Введемо ще одне поняття, яким можна замінити зв'язність. З тору шляхом його деформування можна одержати оболонку, що нагадує форму гирі, яку називатимемо сферою з ручкою. У загальному випадку будь-якій замкнутій оболонці шляхом деформування можна надати форму сфери з G ручками. Так, якщо взяти товсту плиту, пробити в ній G отворів і скруглити всі ребра, то одержимо об'єкт, оболонка якого топологічно еквівалентна сфері з G ручками. На оболонці, топологічно еквівалентній сфері з G ручками, можна провести $2G$ замкнуті криві, по яких її розкрояють в найпростішу оболонку. Будь-яка наступна замкнута лінія розріже оболонку на дві найпростіші оболонки.

Сфера з G ручками має зв'язність $h = 2G + 1$. Оболонка реальної деталі топологічно еквівалентна сфері з деяким числом ручок. На рис. 4.18 представлена сфера із чотирма ручками.



Рисунок 4.18 - Сфера з чотирма ручками

Більш наочно, ніж зв'язність, характеристикою топології оболонки може бути число ручок G сфери, до якої шляхом деформування можна привести замкнуту оболонку. Візьмемо до уваги те, що сфера з G ручками має зв'язність

$h = G + 1$, і одержимо формулу, яка зв'яже число граней F , ребер E , вершин V і циклів L з характерною величиною G ,

$$F - E + V + (F - L) - 2(1 - G) = 0. \quad (4.4)$$

Дану формулу називають *формулою Ейлера-Пуанкаре*. Величина G (*genus*) характеризує *топологічний тип оболонки*. Формула Ейлера-Пуанкаре дозволяє визначити топологічний тип

оболонки, якщо відомо число її граней, ребер, вершин і циклів:

$$G = 1 - F + \frac{E + V - L}{2}. \quad (4.5)$$

Реальні об'єкти можуть мати всередині порожнечі. У цьому випадку об'єкти описують декількома оболонками. Одна із цих оболонок є зовнішньою, інші – лежать всередині її. Якщо об'єкт, який моделюють, має m порожнеч, то його описуватимуть $S = m + 1$ оболонками. Зажадаємо, щоб внутрішні оболонки не перетинали одна одну і зовнішню оболонку. Для кожної оболонки справедлива формула (4.4), а для об'єкту з S замкнутими оболонками формула Ейлера-Пуанкаре (4.4) матиме вигляд

$$F - E + V + (F - L) - 2(S - G) = 0, \quad (4.6)$$

де F - загальне число граней моделі, E - загальне число ребер моделі, V - загальне число вершин моделі, L - загальне число циклів моделі, S - загальне число оболонок об'єкту, що моделюють, G - топологічний тип об'єкту, який дорівнює загальному числу ручок всіх його оболонок, що його описують.

Таким чином, топологічно еквівалентними об'єктами є два об'єкти, у яких рівне число оболонок, а відповідні зовнішні й внутрішні оболонки мають однаковий топологічний тип.

Якщо оболонка не є замкнутою, то говорити про її топологічний тип G не має сенсу. Для незамкнутої орієнтованої оболонки формула Ейлера має вигляд

$$F - E + V + (F - L) + h = 2. \quad (4.7)$$

Однорідні оболонки. Для моделювання деталей підходять замкнуті двобічні оболонки, які не перетинають самі себе. До них відносять оболонки, топологічно еквівалентні сфері з G ручками. Саме такі замкнуті оболонки використовуватимемо для геометричного моделювання. До вершин, ребр, циклів і граней висунемо наступні вимоги. Грані не повинні перетинати самі себе. Грані стикаються тільки по ребрах, причому в кожному ребрі стикаються тільки дві грані. Оболонка, представлена на рис. 4.19, некоректна, оскільки в ребрі AB стикаються чотири грані. Така оболонка топологічно повинна бути представлена одним зі

способів, наведених на рис. 4.20 і 4.21. Ребра стикуються тільки у вершинах.

У кожній вершині може стикуватися будь-яке кінцеве число ребер. Кожну вершину можна обійти по поверхні оболонки, але при цьому необхідно перетнути всі ребра, що стикуються у вершині, і обійти всі грані, які примикають до вершини. Такі вершини називатимемо простими. Оболонка, представлена на рис. 4.22, також некоректна, оскільки вершину A можна обійти по поверхнях граней, не перетинаючи всіх ребер, які стикуються в ній.

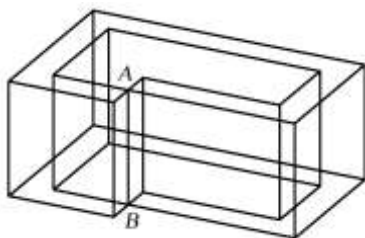


Рисунок 4.19 - У кожному ребрі повинні перетинатися тільки дві грані

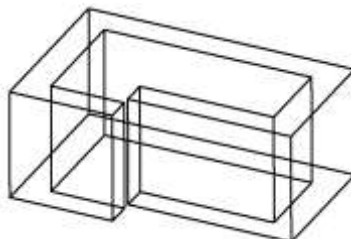


Рисунок 4.20 - Коректна оболонка

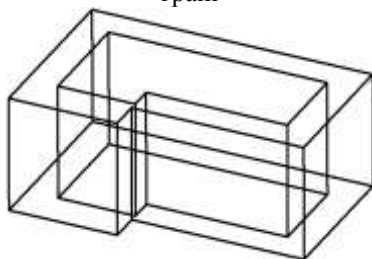


Рисунок 4.21 - Коректна оболонка

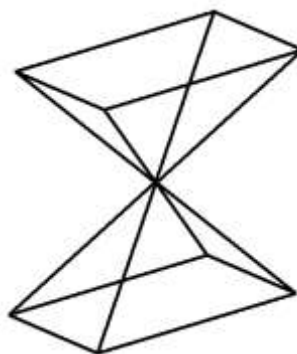


Рисунок 4.22 - Некоректна оболонка

Така оболонка топологічно повинна бути представлена способом, наведеним на рис. 4.23.

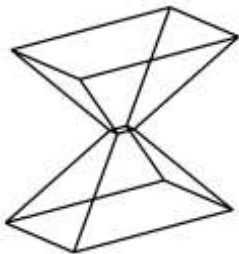


Рисунок 4.23 - Коректна оболонка

Таким чином, для моделювання використовуватимемо оболонки, вершини яких є простими, грані перетинаються по ребрах, причому в кожному ребрі стикаються тільки дві грані. Такі оболонки називатимемо однорідними. В однорідних оболонках всі топологічні елементи побудовані за єдиними правилами.

4.6. Поверхневе і твердотільне моделювання

У геометричному моделюванні використовують терміни "поверхневе моделювання" (моделювання поверхонь) і "твердотільне моделювання" (моделювання твердих тіл). В обох випадках результатом моделювання є деяка оболонка (або кілька оболонок), що описує поверхню об'єкту, який моделюють. Процес моделювання у першому випадку відрізняється від процесу моделювання у другому випадку.

У поверхневому моделюванні спочатку створюють і модифікують необхідним чином поверхні, що описують окремі елементи об'єкту, який моделюють. Ці поверхні обрізають по лініях перетинання, сполучають один з одним поверхнями скруглення або переходу, а також виконують над ними інші операції. Потім з отриманих поверхонь складають (компонують) оболонку. У поверхневому моделюванні результуюча оболонка не обов'язково повинна бути замкнутою. Вона може відображати лише частину (головну частину) об'єкту, який моделюють. Поверхневе моделювання дозволяє зосередити зусилля на складних формах об'єкта. Його широко застосовують для проектування кузовів автомобілів і фюзеляжів літаків.

У твердотільному моделюванні із самого початку працюють з оболонками тіл, а не з окремими поверхнями. Оболонки повністю описують поверхні об'єктів, що відокремлюють їх внутрішній об'єм від іншої частини простору. Процес побудови оболонки тіла в цьому випадку аналогічний процесу виготовлення об'єкту, який моделюють. Спочатку створюють оболонку деякої заготовки

простої форми. Далі оболонку заготовки змінюють заданим чином. Для цього використовують булеві операції над тілами, операцію побудови тонкостінного тіла із заготовки, операцію скруглення ребер, операцію побудови ребер жорсткості та інші. За допомогою операцій оболонці тіла надають необхідну форму.

Вказані два підходи до моделювання мають багато спільного і відрізняються технологією створення моделі. В обох випадках виконують аналогічні дії, але в різній послідовності. У наступному розділі розглянемо моделювання твердих тіл, оскільки воно містить у собі всі елементи поверхневого моделювання.

Питання для самостійного контролю.

1. Дайте коротку характеристику топологічних об'єктів.
2. Укажіть топологічні особливості оболонок.
3. Укажіть порівняльні топологічні особливості вершин, ребер, циклів і граней.
4. Розкрийте зміст поняття «Ейлерова характеристика оболонок».
5. Розкрийте зміст поняття «зв'язність оболонок».
6. Розкрийте зміст поняття «орієнтованість оболонок».
7. Які є топологічні особливості листа Мебіуса?
8. Які є топологічні особливості пляшки Клейна?
9. Які є топологічні особливості гептаедра?
10. Які є загальні принципи вибору оболонок для моделювання тіл?
11. Як визначити топологічний тип оболонки, якщо відоме число її граней, ребер, вершин і циклів?
12. Охарактеризуйте особливості поверхневого і твердотілого моделювання.

РОЗДІЛ 5. 3D МОДЕЛЮВАННЯ ТІЛ

5.1. Математична модель твердого тіла

Точки, лінії та поверхні є математичними абстракціями. У них хоча б один розмір приймається рівним нулю. Реальні об'єкти мають всі розміри відмінні від нуля і займають деякий кінецьний об'єм у просторі. Для геометричного моделювання предметів, які займають кінецьний об'єм, у математиці використовують об'єкти, названі твердими тілами або просто тілами. Спосіб їх опису відрізняється від способу опису кривих і поверхонь. При моделюванні тіл будують поверхні, які відокремлюють займану ними частину простору від іншої частини простору. Існує декілька підходів до опису тіл.

Безліч предметів можна змоделювати з використанням тільки плоских поверхонь. Таке представлення тіл називають *плоскогранним (Faceted representation або Faceted)*. У плоскогранному описі криволінійну поверхню апроксимують деякою кількістю пластин трикутної або чотирикутної форми. Використання плоских поверхонь значно спрощує виконання операцій над тілами. Плоскогранне представлення широко застосовують у будівництві і комп'ютерній графіці для одержання тонових зображень.

Деякі поверхні можна описати рівняннями в координатній формі (представити поверхні неявно). До них відносять поверхні другого порядку, поверхню тору та інші. Використовуючи для моделювання тіл такі поверхні, приходять до *конструктивної твердотільної геометрії (Constructive Solid Geometry або CSG)*. Конструктивна твердотільна геометрія оперує примітивами, до яких, як правило, відносять прямокутну призму, трикутну призму, сферу, циліндр, конус і тор. Над примітивами і отриманими з них тілами виконують різні операції (у першу чергу Булеві операції). Поверхні з конструктивною твердотільною геометрією (сферична, циліндрична, конічна, поверхня тору і площина) ділять простір на дві частини і для них можна вказати, з якого боку поверхні знаходиться внутрішній об'єм тіла. Неявне представлення поверхонь дає можливість одержати лінії їх перетину в аналітичній формі. Конструктивна твердотільна геометрія дозволяє

моделювати більшість промислових виробів.

Найбільш загальний підхід до опису тіл полягає у представленні тіла сукупністю оболонок, які обмежують його об'єм, а грані і ребра яких задані параметрично. Кожну оболонку будують з набору поверхонь довільної форми, що стикаються між собою та містять повну інформацію про свої межі і зв'язки з сусідами. Такий опис тіл називають *представленням за допомогою меж (Bounded representation або B-rep)*. Воно дає можливість виконувати над тілами багато різних операцій, зберігаючи при цьому єдиний спосіб їх «внутрішнього упорядкування». Представлення тіл за допомогою меж дозволяє моделювати об'єкти довільної форми і складності.

Всі зазначені підходи до опису тіл використовують топологічні об'єкти та задовольняють умовам зв'язності, орієнтовності і замкнутості. Розглядатимемо представлення тіл за допомогою меж, спираючись на такі топологічні об'єкти, як вершина, ребро, грань і оболонка. Оболонки тіла повинні бути однорідними, тобто повинні бути описані за єдиними правилами. Оболонки складають з набору граней. Кожна грань базується на деякій поверхні. Грань відрізняється від поверхні тим, що крім поверхні вона в структурі своїх даних несе інформацію про зв'язки із сусідніми гранями і про орієнтацію стосовно внутрішнього об'єму тіла. Там, де це не буде створювати плутанини, грані позначатимемо так само, як і поверхні, на яких вони базуються.

Якщо взяти будь-яку деталь, то можна помітити, що поверхні, які її обмежують, ділять простір на дві частини: одну частину простору займає деталь і вона знаходиться усередині оболонок (поза оболонками), а інша частина простору лежить поза (усередині) деталі. Перейти з однієї частини простору в іншу, не перетинаючи обмежуючі оболонки, не можна.

Обмежуючі оболонки ніби ізолюють одну частину простору від іншої. Тіло може мати одну або кілька оболонок. Якщо тіло має порожнечі, то його об'єм обмежений декількома оболонками. Одна з цих оболонок є зовнішньою, а інші оболонки - внутрішніми. Внутрішні оболонки обмежують порожнечі і повністю лежать усередині зовнішньої оболонки. Оболонки тіла не повинні перетинати одна одну й самі себе. Для опису тіл найбільше підходять двобічні (орієнтовні) оболонки. Одним своїм боком

кожна оболонка звернена усередину тіла, а іншим - назовні. Для того, щоб відрізнити бік оболонки, спрямований назовні тіла, від боку, спрямованого усередину тіла, кожній точці оболонки приписують нормаль, яку вважають спрямованою назовні тіла. Нормаль зовнішньої оболонки тіла спрямована поза простору, що обмежується нею, а нормаль внутрішньої оболонки тіла спрямована усередину простору, що обмежується нею. Таким чином, внутрішні оболонки тіла як би вивернуті навиворіт.

З математичної точки зору одна зовнішня оболонка та, можливо, в сукупності з декількома внутрішніми оболонками описують тіло. Інакше кажучи, для створення математичної моделі тіла досить змоделювати сукупність оболонок, що обмежують його об'єм. Але для редагування тіла необхідна інформація про послідовність і способи його побудови, тому в модель тіла включають ще й *дерево побудови* (або протокол побудови) тіла.

У більшості випадків оболонки, що описують тіло, є замкнутими, але тіло можна описати й незамкнутою оболонкою, якщо її краї стягнуті в точку. Залучення топології при моделюванні тіл необхідно для коректного виконання операцій над ними. Топологічні об'єкти були розглянуті в попередньому розділі. Зупинимося на структурі даних цих об'єктів. Структура даних повинна бути такою, щоб при бажанні можна було знайти всіх сусідів будь-якого топологічного об'єкту. Для цього вони повинні нести інформацію про взаємний зв'язок один з одним. Будуватимемо оболонки тіл з топологічних об'єктів, які нестимуть кількісну геометричну і топологічну інформацію.

Оболонка тіла складається з набору граней. Грань будують на основі поверхні, що входить у структуру даної грані. Поверхня є геометричним носієм грані. Один бік грані спрямований назовні оболонки, інший – усередину. Грань повинна містити ознаку орієнтації нормалі поверхні назовні або усередину грані. Нехай ознака приймає позитивне значення, якщо нормаль поверхні спрямована назовні грані, і негативне значення - у протилежному випадку.

Грані стикаються між собою по ребрах, що лежить на лініях перетинання граней. Топологічний об'єкт ребро будують на основі лінії перетинання поверхонь, що стикаються в ребрі граней. Нехай у ребрі стикаються грані, побудовані на поверхнях $r(u, v)$ і $s(a, b)$.

Лінію перетинання граней описують двома поверхнями і двома двомірними лініями - кожна в просторі параметрів відповідної поверхні. На грані, що базується на поверхні $\mathbf{r}(u, v)$, двомірну лінію позначимо векторною функцією $\mathbf{l}_{uv}(t) = [u(t) \ v(t)]^T$, а на грані, що базується на поверхні $\mathbf{s}(a, b)$, двомірну лінію позначимо векторною функцією $\mathbf{l}_{ab}(t) = [a(t) \ b(t)]^T$. Таким чином, лінію перетинання граней, на якій базується ребро, запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv}(t) &= \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \equiv [u(t) \ v(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{uv}(t) \in \mathbf{r}(u, v), \\ \mathbf{l}_{ab}(t) &= \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix} \equiv [a(t) \ b(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{ab}(t) \in \mathbf{s}(a, b), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$t_{\min} \leq t \leq t_{\max}.$$

Ребро може мати напрямок, який співпадає зі своєю лінією або йому протилежний. Для цього в структурі даних ребра повинна бути відповідна ознака. Нехай ця ознака приймає позитивне значення, якщо ребро спрямоване по кривій, і негативне значення - у протилежному випадку.

Ребра, що обмежують грань, входять у структуру даної грані у вигляді циклів. *Цикл* - це топологічний об'єкт, який характеризує межу грані. Цикл завжди замкнутий і має певний напрямок. Він складається зі списку ребер і їх орієнтації в циклі. Орієнтацію ребра в циклі грані описуватимемо ознакою, що називатимемо *прапором*. Нехай ребру, напрямком якого збігається з напрямком циклу, приписують позитивний прапор, а ребру, напрямком якого не збігається з напрямком циклу, - негативний прапор. Таким чином, цикл складається зі списку ребер у порядку проходження та списку відповідних їм прапорів.

Грань може містити кілька циклів, причому один з них є зовнішнім, а інші - внутрішніми. Внутрішні цикли повинні повністю лежати усередині зовнішнього. Цикл вважатимемо спрямованим так, щоб при русі уздовж його грань завжди перебувала б ліворуч, якщо дивитися із зовнішнього боку грані. Таким чином, зовнішній цикл грані орієнтований проти годинникової стрілки, а внутрішні цикли - за годинниковою стрілкою, якщо дивитися назустріч нормалі грані. По кожному

циклу можна побудувати контур на поверхні, що описує межу грані. На рис. 5.1 представлений приклад плоскої грані із вказівкою напрямку її циклів.

Ребро, що розділяє дві грані, входить у два цикли: в одному циклі напрямок ребра збігається з напрямком циклу, а в іншому – є протилежним. Ребро входить у цикл грані ліворуч від нього з позитивним прапором, а в цикл грані праворуч від нього – з негативним прапором.

Ребро починається і кінчається у вершинах. Кожна вершина базується на точці в просторі і містить інформацію про ребра, що стикаються в ній.

У кожній вершині можуть стикуватися кілька ребер. Якщо ребро замкнуте, то воно починається й кінчається в одній і тій же вершині. Ребро повинно містити інформацію про те, яка грань розташована ліворуч, а яка - праворуч від ребра, якщо дивитися із зовнішньої сторони оболонки уздовж напрямку ребра, і яка вершина перебуває на початку ребра, і яка - наприкінці. На рис. 5.2 представлено ребро, що починається у вершині *A* і кінчається у вершині *B*.

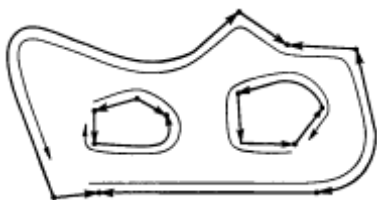


Рисунок 5.1 - Грань та її структура даних: поверхня, її орієнтація та список циклів

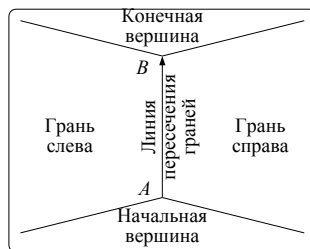


Рисунок 5.2 - Ребро *AB* та його структура даних

Описана структура даних топологічних об'єктів містить двонаправлений зв'язок між ними. Перебуваючи на одному з топологічних об'єктів, можна послідовно пройти всю оболонку, у яку входить цей об'єкт.

Таким чином, математична модель тіла містить кількісну геометричну інформацію у вигляді поверхонь, ліній і точок їх стикування, топологічну інформацію у вигляді зв'язків точок

поверхні тіла між собою та інформацію про послідовність і способи побудови у вигляді дерева побудови.

5.2. Найпростіші тіла

Способи моделювання деталей часто повторюють технологічний процес їх виробництва. Один зі способів моделювання тіл полягає у тому, що беруть деяку заготовку тіла і потім шляхом видалення та додавання в певних місцях додаткового об'єму (матеріалу) одержують тіло необхідної форми. В якості заготовки можуть приймати тіла найпростішої форми: прямокутну призму, циліндр, конус, кулю, тор і інші. Найпростіші тіла складаються з однієї оболонки, побудованої за загальними правилами. Розглянемо побудову оболонки деяких найпростіших тіл.

Для кожного найпростішого тіла потрібна місцева декартова прямокутна система координат, радіус-вектор початку якої позначимо через \mathbf{p} , а базисні орти – через \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z .

5.2.1. Прямокутна призма

Початок місцевої системи координат помістимо в одну з вершин призми, а її орти направимо по ребрах, що стикаються в цій вершині. Нехай у напрямку орту \mathbf{i}_x тіло має довжину, рівну x , у напрямку орту \mathbf{i}_y - довжину, рівну y , а в напрямку орту \mathbf{i}_z - довжину, рівну z . Прямокутна призма складається із шести граней.

Кожна грань є частиною площини, яка обмежена прямокутним контуром, з ознакою орієнтації нормалі площини назовні тіла і одним циклом. Контури складаються з відрізків прямих. Прямокутна призма має 12 ребер. Кожне ребро складається з лінії перетинання поверхонь сусідніх граней і ознаки збігу напрямку ребра з напрямком лінії перетинання. Кожна лінія перетинання складається із двох ліній на поверхні: одна на поверхні однієї грані, інша – на другій. Обидві лінії на поверхні мають однакову геометричну й параметричну довжину і повністю співпадають у просторі.

Кожна лінія на поверхні – це сукупність поверхні та двомірної лінії на ній. Прямокутну призму з орієнтацією циклів граней представлено на рис. 5.3.

Грані тіла описують поверхнями:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1(u_1, v_1) &= \mathbf{p} + u_1 \mathbf{i}_x + v_1 \mathbf{i}_y, & 0 \leq u_1 \leq x, & \quad 0 \leq v_1 \leq y, \\
 \mathbf{r}_2(u_1, v_1) &= \mathbf{p} + u_2 \mathbf{i}_y + v_2 \mathbf{i}_z, & 0 \leq u_2 \leq y, & \quad 0 \leq v_2 \leq z, \\
 \mathbf{r}_3(u_1, v_1) &= \mathbf{p} + u_3 \mathbf{i}_x + v_3 \mathbf{i}_z, & 0 \leq u_3 \leq x, & \quad 0 \leq v_3 \leq z, \\
 \mathbf{r}_4(u_4, v_4) &= \mathbf{p} + z \mathbf{i}_z + u_4 \mathbf{i}_x + v_4 \mathbf{i}_y, & 0 \leq u_4 \leq x, & \quad 0 \leq v_4 \leq y, \\
 \mathbf{r}_5(u_4, v_4) &= \mathbf{p} + x \mathbf{i}_x + u_5 \mathbf{i}_y + v_5 \mathbf{i}_z, & 0 \leq u_5 \leq y, & \quad 0 \leq v_5 \leq z, \\
 \mathbf{r}_6(u_4, v_4) &= \mathbf{p} + y \mathbf{i}_y + u_6 \mathbf{i}_x + v_6 \mathbf{i}_z, & 0 \leq u_6 \leq x, & \quad 0 \leq v_6 \leq z.
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

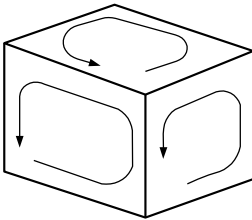


Рисунок 5.3 - Орієнтація циклів граней призматичного тіла

У третій, четвертій та п'ятій гранях нормаль поверхні спрямована назовні тіла, а у першій, другій і шостій - усередину. Ця інформація міститься в грані у вигляді ознаки збігу нормалей.

Наведемо опис одного з ребер. Наприклад, ребро між першою та другою гранями описують лінією перетинання цих граней, які складають два двомірні відрізки:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{l}_{uv1}(t) &= [u_1(t) \ v_1(t)]^T = [0 \ yt]^T, \quad \mathbf{l}_{uv1}(t) \in \mathbf{r}_1(u_1, v_1), \\
 \mathbf{l}_{uv2}(t) &= [u_2(t) \ v_2(t)]^T = [0 \ yt]^T, \quad \mathbf{l}_{uv2}(t) \in \mathbf{r}_2(u_2, v_2), \\
 &0 \leq t \leq 1,
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

і дві поверхні. Вираз $\mathbf{l}_{uv1}(t) \in \mathbf{r}_1(u_1, v_1)$ означає, що відрізок $\mathbf{l}_{uv1}(t)$ лежить на поверхні $\mathbf{r}_1(u_1, v_1)$, а вираз $\mathbf{l}_{uv2}(t) \in \mathbf{r}_2(u_2, v_2)$ – що відрізок $\mathbf{l}_{uv2}(t)$ лежить на поверхні $\mathbf{r}_2(u_2, v_2)$. Нехай напрямком ребра збігається з напрямком кривої (5.3), що зафіксуємо в ознаці збігу напрямків. Ознаку збігу напрямку ребра з напрямком циклу грані називають прапором. Прапор може приймати два значення: позитивне і негативне. Ребро входить у цикл першої грані з позитивним прапором, а в цикл другої грані - з негативним прапором. Якщо дивитися уздовж напрямку ребра зовні тіла, то ліворуч від нього лежить перша грань, а праворуч – друга.

Для побудови граней тіла досить знати місцеву систему

координат \mathbf{p} , \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z і сторони x , y , z призми.

5.2.2 Циліндричне тіло

Іншою заготовкою може бути циліндричне тіло (рис. 5.4).

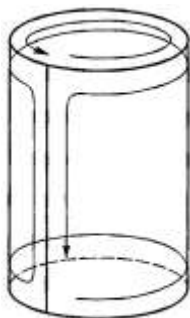


Рисунок 5.4 - Орієнтація циклів
граней циліндричного тіла

Початок місцевої системи координат \mathbf{p} помістимо в центр одного з торців циліндру, а орт \mathbf{i}_z направимо уздовж його осі. Нехай циліндр має радіус r і довжину h .

Циліндричне тіло має три грані. Торцеві грані складаються із частин площини, що обмежені колами на них, граничного циклу і ознаки орієнтації нормалі площини грані назовні тіла. Цикл кожної торцевої грані складається з одного замкнутого ребра. Геометричним носієм такого ребра є лінія перетинання, яку складають дві криві на поверхні. Одна крива є колом на площині, а друга - лінією $v = v_{min}$ або $v = v_{max}$ на циліндричній поверхні. Нагадаємо, що обидві лінії на поверхні, які утворюють лінію перетинання, повинні мати однакову параметричну довжину.

Бічна грань тіла базується на циліндричній поверхні

$$\mathbf{r}_1 = (u_1, v_1) = \mathbf{p} + r \cos u_1 \mathbf{i}_x + r \sin u_1 \mathbf{i}_y + hv_1 \mathbf{i}_z, \quad 0 \leq u_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq v_1 \leq 1. \quad (5.4)$$

Нормалі поверхні (5.4) і її грані співпадають за напрямком. Ця грань має один цикл. Циліндрична поверхня бічної грані є замкнутою за одним з параметрів.

Грані основи базуються на площинах, що обмежені колами

$$\mathbf{r}_2 = (u_2, v_2) = \mathbf{p} + u_2 \mathbf{i}_x + v_2 \mathbf{i}_y, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{r}_3 = (u_3, v_3) = \mathbf{p} + u_3 \mathbf{i}_x + v_3 \mathbf{i}_y + h \mathbf{i}_z, \quad (5.6)$$

де параметри u_2, v_2 лежать усередині кола $\mathbf{l}_{uv2}(t) = [r \cos t \ r \sin t]^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$, на площині $\mathbf{r}_2(u_2, v_2)$, а параметри u_3, v_3 лежать усередині кола $\mathbf{l}_{uv3}(t) = [r \cos t \ r \sin t]^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$, на площині $\mathbf{r}_2(u_2, v_2)$.

Нормалі поверхні (5.5) і її грані протилежні за напрямком, а нормалі поверхні (5.6) і її грані співпадають.

Ребро, побудоване на лінії замикання оболонки, є швом. Шов, так само як і будь-яке інше ребро, базується на лінії перетинання. У цьому випадку лінію перетинання описують двомірними кривими

$$\begin{aligned} l_{uv01}(t) &= [u_1(t) \ v_1(t)]^T = [0 \ ht]^T, \quad l_{uv01}(t) \in \mathbf{r}_1(u_1, v_1), \\ l_{uv02}(t) &= [u_2(t) \ v_2(t)]^T = [2\pi \ yt]^T, \quad l_{uv02}(t) \in \mathbf{r}_2(u_2, v_2), \quad (5.7) \\ &0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

які є лініями $u = u_{\min}$ та $u = u_{\max}$ на циліндричній поверхні.

Ребро між бічною гранню і основою (5.5) описують лінією перетинання цих граней, яка складається із двох двомірних кривих (відрідка і кола)

$$\begin{aligned} l_{uv1}(t) &= [u_1(t) \ v_1(t)]^T = [t \ 0]^T, \quad l_{uv1}(t) \in \mathbf{r}_1(u_1, v_1), \\ l_{uv2}(t) &= [u_2(t) \ v_2(t)]^T = [r \cos t \ r \sin t]^T, \quad l_{uv2}(t) \in \mathbf{r}_2(u_2, v_2), \quad (5.8) \\ &0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Відрідок $l_{uv1}(t)$ лежить на поверхні $\mathbf{r}_1(u_1, v_1)$, коло $l_{uv3}(t)$ лежить на поверхні $\mathbf{r}_3(u_3, v_3)$. Нехай напрямок ребра співпадає з напрямком кривої (5.8), що відзначимо відповідною ознакою збігу напрямків. Це ребро входить у цикл першої грані з позитивним прапором, а в цикл другої грані - з негативним. Якщо дивитися уздовж напрямку ребра зовні тіла, то ліворуч від ребра лежить перша грань, а праворуч - друга.

Ребро між бічною гранню і основою (5.6) описують лінією перетинання цих граней, яка складається із двох двомірних кривих (відрідка і кола)

$$\begin{aligned} l_{uv1}(t) &= [u_1(t) \ v_1(t)]^T = [t \ h]^T, \quad l_{uv1}(t) \in \mathbf{r}_1(u_1, v_1), \\ l_{uv3}(t) &= [u_3(t) \ v_3(t)]^T = [r \ cos t \ r \ sin t]^T, \quad l_{uv3}(t) \in \mathbf{r}_3(u_3, v_3), \quad (5.9) \\ &0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Відрідок $l_{uv1}(t)$ лежить на поверхні $\mathbf{r}_1(u_1, v_1)$, коло $l_{uv3}(t)$ лежить

на поверхні $\mathbf{r}_3(u_3, v_3)$. Нехай напрямок ребра співпадає з напрямком кривої (5.9), що відзначимо відповідною ознакою збігу напрямків.

Це ребро входить у цикл першої грані з негативним прапором, а в цикл третьої грані - з позитивним. Якщо дивитися уздовж напрямку ребра зовні тіла, то ліворуч від ребра лежить третя грань, а праворуч – перша.

Цикли граней основи мають усього одне ребро. Цикл бічної грані складається зі списку ребер з відповідними прапорами:

ребро на базі кривої (5.8) - прапор позитивний;

ребро на базі кривої (5.7) - прапор позитивний;

ребро на базі кривої (5.9) - прапор негативний;

ребро на базі кривої (5.7) - прапор негативний.

Циліндричне тіло і орієнтація циклів його граней представлені на рис. 5.4.

Для побудови граней тіла досить знати місцеву систему координат \mathbf{p} , \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z , радіус r і висоту h циліндру.

5.2.3 Конічне тіло

Тіло у формі зрізаного конусу будують аналогічно циліндричному тілу з тією лиш різницею, що в якості поверхні бічної грані замість циліндричної використовують конічну поверхню

$$\mathbf{r}_1(u_1, v_1) = \mathbf{p} + (r + hv_1 \operatorname{tg} \gamma) (\cos u_1 \mathbf{i}_x + \sin u_1 \mathbf{i}_y) + hv_1 \mathbf{i}_z, \quad 0 \leq u_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq v_1 \leq 1. \quad (5.10)$$

Грані основи базуються на поверхнях, обмежених колами

$$\mathbf{r}_2(u_2, v_2) = \mathbf{p} + u_2 \mathbf{i}_x + v_2 \mathbf{i}_y, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{r}_3(u_3, v_3) = \mathbf{p} + u_3 \mathbf{i}_x + v_3 \mathbf{i}_y + h \mathbf{i}_z, \quad (5.12)$$

де параметри u_2, v_2 лежать усередині кола

$$\mathbf{l}_{uv2}(t) = [r \cos t \quad r \sin t]^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (5.13)$$

а параметри u_3, v_3 лежать усередині кола

$$\mathbf{l}_{uv2}(t) = [(r + h \operatorname{tg} \gamma) \cos t \quad (r + h \operatorname{tg} \gamma) \sin t]^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (5.14)$$

Ребро, побудоване на бічній грані, буде швом. У загальному випадку конічне тіло має три грані. Якщо конус не зрізаний, то

одна з торцевих граней стягнута в точку. Стягнуту в точку грань можна виключити з моделі тіла, тоді оболонка тіла з топологічної точки зору буде незамкнутою, хоча діаметр отвору в ній дорівнює нулю.

Для побудови граней тіла досить знати місцеву систему координат \mathbf{p} , \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z , радіус r однієї з основ конусу, висоту h і кут конусності γ .

5.2.4 Сферичне тіло

Сферична поверхня може бути оболонкою сферичного тіла, але ця оболонка не є замкнутою, оскільки має два отвори нульового радіусу в полюсах. Початок місцевої системи координат \mathbf{p} для сферичного тіла помістимо в центр сфери. Оболонка, описувана сферичною поверхнею

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{p} + r \cos v \cos u \mathbf{i}_x + r \cos v \cos u \mathbf{i}_y + r \sin v \mathbf{i}_z, \\ 0 \leq u \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

топологічно еквівалентна циліндричній поверхні. Ребра в полюсах стягнуті в точку, але двомірні криві на сферичній поверхні в полюсах мають ненульову довжину. Цикл грані сферичного тіла складають три ребра, одне з яких є швом

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv1}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = [0 \ t]^T, \quad \mathbf{l}_{uv1}(t) \in \mathbf{r}(u, v), \\ \mathbf{l}_{uv2}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = [2\pi \ t]^T, \quad \mathbf{l}_{uv2}(t) \in \mathbf{r}(u, v), \\ &-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

а два інших описуються лініями на полюсах сфери:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv01}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = \left[t \ -\frac{\pi}{2} \right]^T, \quad \mathbf{l}_{uv01}(t) \in \mathbf{r}(u, v), \\ \mathbf{l}_{uv02}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = \left[t \ \frac{\pi}{2} \right]^T, \quad \mathbf{l}_{uv02}(t) \in \mathbf{r}(u, v), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Лінії перетину в полюсах складаються із двох однакових ліній на сфері. Шов входить у список ребер циклу двічі: один раз із позитивним прапором, другий раз – з негативним прапором. Сферичне тіло показано на рис. 5.5.

Сферичне тіло можна побудувати із двох півсфер, які описують векторними функціями

$$\mathbf{r}_1(u, v) = \mathbf{p} + x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\mathbf{i}_z, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{r}_2(u, v) = \mathbf{p} + x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\mathbf{i}_z, \quad (5.19)$$

$$x = x(u, v) = r \left(\cos u + \cos v - 1 + \frac{2u(1 - \cos v - \sin v)}{\pi} + \frac{2v(1 - \cos u - \sin u)}{\pi} \right),$$

$$y = y(u, v) = r \left(\sin u + \sin v - \frac{2u(1 - \cos v - \sin v)}{\pi} + \frac{2v(1 - \cos u - \sin u)}{\pi} \right),$$

$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2},$$

r - радіус сфери, \mathbf{p} - радіус-вектор центру, \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z - орти, що визначають орієнтацію сфери. Поверхня (5.18) описує верхню півсферу, а поверхня (5.19) – нижню.



Рисунок 5.5 - Орієнтація циклу грані сферичного тіла



Рисунок 5.6 - Побудова сферичного тіла за двома півсферами

Нормалі верхньої поверхні і її грані співпадають за напрямком, а нормалі нижньої поверхні і її грані протилежні за

напрямок. Оболонка сферичного тіла, яка складається з двох півсфер, є замкнутою. Її півсфери стикаються по чотирьох ребрах:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv11}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = \left[\frac{\pi t}{2} \ 0 \right]^T, \quad \mathbf{l}_{uv11}(t) \in \mathbf{r}_1(u, v), \\ \mathbf{l}_{uv21}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = \left[\frac{\pi t}{2} \ 0 \right]^T, \quad \mathbf{l}_{uv21}(t) \in \mathbf{r}_2(u, v), \quad (5.20) \\ &0 \leq t \leq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv12}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = \left[\frac{\pi}{2} \ \frac{\pi t}{2} \right]^T, \quad \mathbf{l}_{uv12}(t) \in \mathbf{r}_1(u, v), \\ \mathbf{l}_{uv22}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = \left[\frac{\pi}{2} \ \frac{\pi t}{2} \right]^T, \quad \mathbf{l}_{uv22}(t) \in \mathbf{r}_2(u, v), \quad (5.21) \\ &0 \leq t \leq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv13}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = \left[\frac{\pi(1-t)}{2} \ \frac{\pi}{2} \right]^T, \quad \mathbf{l}_{uv13}(t) \in \mathbf{r}_1(u, v), \\ \mathbf{l}_{uv23}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = \left[\frac{\pi(1-t)}{2} \ \frac{\pi}{2} \right]^T, \quad \mathbf{l}_{uv23}(t) \in \mathbf{r}_2(u, v), \quad (5.22) \\ &0 \leq t \leq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv14}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = \left[0 \ \frac{\pi(1-t)}{2} \right]^T, \quad \mathbf{l}_{uv14}(t) \in \mathbf{r}_1(u, v), \\ \mathbf{l}_{uv24}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = \left[0 \ \frac{\pi(1-t)}{2} \right]^T, \quad \mathbf{l}_{uv24}(t) \in \mathbf{r}_2(u, v), \quad (5.23) \\ &0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

Поверхні (5.18) і (5.19) для побудови сферичного тіла представлені на рис. 5.7.

Для побудови граней тіла досить знати місцеву систему координат \mathbf{p} , \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z і радіус r сфери.

5.2.5 Тороїдальне тіло

Початок місцевої системи координат \mathbf{p} для тороїдального тіла помістимо в його центр, а орт \mathbf{i}_z направимо по осі симетрії тіла. Нехай більший радіус тору дорівнює R , а малий – r . Тороїдальне тіло має одну грань, яка описана тороїдальною поверхнею

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p} + (R + r \cos v) \cos u \mathbf{i}_x + (R + r \cos v) \sin u \mathbf{i}_y + r \sin v \mathbf{i}_z, \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 2\pi, \\ -\pi \leq v \leq \pi, \end{matrix} \quad (5.24)$$

два ребра

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uvR1}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = [t \ -\pi]^T, \\ \mathbf{l}_{uvR2}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = [t \ \pi]^T, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uvr1}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = [0 \ t]^T, \\ \mathbf{l}_{uvr2}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T = [2\pi \ t]^T, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$-\pi \leq t \leq \pi,$$

і одну вершину в точці перетину ребер $\mathbf{p} + (R - r)\mathbf{i}_x$. Нормаль поверхні і грані тороїдального тіла співпадають за напрямком. Грань тіла має один цикл. Цикл грані складається зі списку ребер з відповідними прапорами:

- ребро на базі кривої (5.25) - прапор позитивний;*
- ребро на базі кривої (5.26) - прапор позитивний;*
- ребро на базі кривої (5.25) - прапор негативний;*
- ребро на базі кривої (5.26) - прапор негативний.*

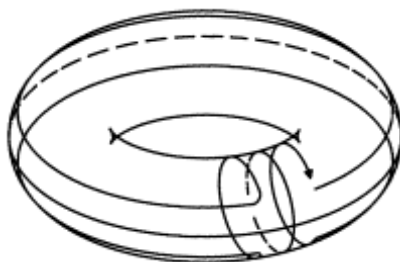


Рисунок 5.7 - Орієнтація циклу грані тороїдального тіла

Тороїдальна поверхня грані є замкнутою за обома параметрами, тому обидва ребра оболонки тіла замкнуті і є швами. Тороїдальне тіло, його ребра і цикл грані представлені на рис. 5.7.

Для побудови граней тіла досить знати місцеву систему координат \mathbf{p} , \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z , більший радіус R і менший радіус r .

5.2.6 Принципи побудови математичної моделі тіл

Розглянуті тіла ілюструють принцип побудови математичної моделі тіл. Ці тіла називають твердотільними примітивами. До них можуть бути віднесені ще деякі тіла простої форми, наприклад, трикутна призма (клин). Всі тіла побудовані за таким же принципом, що і твердотільні примітиви.

Може виникнути питання: для чого потрібно так ускладнювати модель тіла, зокрема, для чого потрібно будувати ребра на кривих перетинання поверхонь? Дійсно, тіла можна було б описати набором поверхонь, не використовуючи ні грані, ні ребра, ні вершини. У реальних деталей ці поверхні можуть мати дуже складну форму, як у сенсі кривизни, так і в сенсі меж, і ці поверхні якимось чином потрібно побудувати. Одним зі зручних способів побудови поверхонь, що описують тіло, є спосіб одночасної побудови всіх необхідних поверхонь за допомогою операцій над тілами. Для цього беруть одне з простих тіл і далі в певних місцях до нього додають або віднімають об'єм. Наприклад, для того щоб просвердлити отвір у деякому тілі, виконують булеву операцію віднімання із цього тіла циліндричного тіла, що грає роль свердла. Аналогічно виконують пази і вирізи. Для того, щоб зварити моделі двох деталей, виконують булеву операцію об'єднання тіл. Використання топологічних об'єктів необхідно для коректного виконання цих операцій. Нехай потрібно відрізати від одного з описаних вище найпростіших тіл деяку частину та нехай різання здійснюють площиною. Тоді необхідно знайти лінії перетинання поверхонь тіла із цією площиною та по цих лініях обрізати поверхні тіла і саму площину. Крім того, потрібно знайти місце стикування обрізаної площини із частиною вихідного тіла. Для площини потрібно визначити, який її бік буде дивитися назовні тіла, а який – усередину. Все це призводить до того, що потрібно знати топологію вихідного тіла і будувати його за

загальними правилами.

При проектуванні доводиться розглядати декілька варіантів деталей і складальних одиниць. Різні варіанти однієї і тієї ж деталі можна одержати шляхом зміни необхідних параметрів її вихідного варіанту. Для цього в математичній моделі деталі необхідно мати інформацію про шлях і способи її побудови. Таким чином, геометрична модель деталі або складальної одиниці повинна бути доповнена ще деякою інформацією про послідовність її побудови.

5.3. Тіла, отримані рухом плоского контура

Багато тіл або заготовок для них можна одержати шляхом руху плоского контуру за заданою траєкторією. Нехай траєкторію руху описують кривою $\mathbf{g}(v)$, яку називатимемо напрямною. Плоский контур називатимемо утворюючою кривою. Нехай дана обмежена площа

$$\mathbf{r}(x, y) = \mathbf{p} + x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y, \quad x, y \in \Omega, \quad (5.27)$$

де Ω - область на площині параметрів, обмежена двомірним контуром $c(t) = [x(t) \ y(t)]^T$.

Контур $c(t)$ складається з набору двомірних кривих $\mathbf{c}_i(u) = [x_i(u) \ y_i(u)]^T$, $u_{i \min} \leq u \leq u_{i \max}$, $i = 1, 2, \dots, n$, які стикаються одна з одною.

Радіус-вектор контуру описують формулою (2.12.7). Кожну криву контуру в просторі описують радіус-вектором

$$\mathbf{c}_i(u) = \mathbf{p} + x_i(u)\mathbf{i}_x + y_i(u)\mathbf{i}_y, \quad u_{i \min} \leq u \leq u_{i \max}. \quad (5.28)$$

Контур не повинен мати точок самоперетинання. Якщо напрямна крива $\mathbf{g}(v)$ руху контуру не замкнута, то оболонка тіла має торцеві грані.

Торцеві грані тіл руху є площинами, які обмежені заданим контуром. Їх описують радіус-вектором. Якщо напрямна крива руху контуру замкнута, то оболонка тіла не має торцевих граней. Бічні грані оболонки тіла базуються на поверхнях руху. Число бічних граней дорівнює числу кривих у контурі. Кожна бічна поверхня в якості утворюючої має просторовий аналог відповідної кривої контуру. Залежно від типу траєкторії руху $\mathbf{g}(v)$ можна побудувати декілька типів тіл.

5.3.1 Тіло видавлювання

Якщо напрямною руху контуру служить відрізок прямої $\mathbf{g}(v) = \mathbf{p} + v\mathbf{hd}$, $0 \leq v \leq 1$, то одержимо тіло видавлювання. Одну з його торцевих граней описуватимуть обмеженою площиною (5.27).

Інші його торцеву грань описуватимуть аналогічною площиною, тільки з початком у точці $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{hd}$. Бічну грань тіла видавлювання, що відповідає кривій контуру $\mathbf{c}_i(u)$, описують поверхнями

$$\mathbf{r}_i(u, v) = \mathbf{p} + x_i(u)\mathbf{i}_x + y_i(u)\mathbf{i}_y + v\mathbf{hd} = \mathbf{c}_i(u) + v\mathbf{hd},$$

$$u_{i \min} \leq u \leq u_{i \max}, \quad 0 \leq v \leq 1 \quad (5.29)$$

Тіло видавлювання, побудоване по замкнутому контурі, представлено на рис. 5.8. Для контуру можна побудувати еквідистантний контур. За заданим контуром та еквідистантним до нього контуром можна побудувати тіло видавлювання з ухилом.

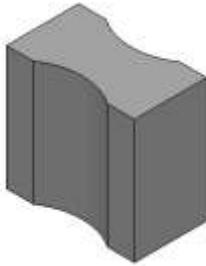


Рисунок 5.8 - Тіло видавлювання



Рисунок 5.9 - Тіло видавлювання з ухилом

Кут ухилу визначають еквідистантою і довжиною видавлювання. Тіло видавлювання з ухилом представлено на рис. 5.9. Видавлювання виконано в обидва боки від площини (5.29). Бічні грані тіла з ухилом побудовані на лінійчатих поверхнях.

Тонкостінне тіло видавлювання може бути побудоване по замкнутій або незамкнутій складеній плоскій кривій. Для його побудови також використовують еквідистантні складові криві. Тонкостінні тіла видавлювання представлено на рис. 5.10 і 5.11.

Замкнута складова крива та незамкнута складова крива, за якими побудовані зазначені тіла, представлені на рис. 5.12.

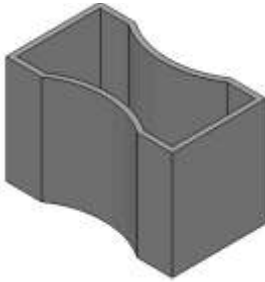


Рисунок 5.10 - Тонкостінне тіло
видавлювання

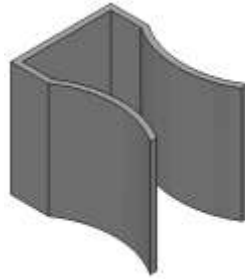
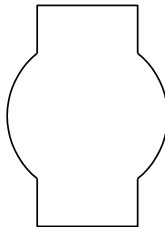
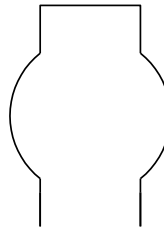


Рисунок 5.11 - Тонкостінне тіло
видавлювання



a



б

Рисунок 5.12 - Замкнута (*a*) і незамкнута (*б*) складова крива

5.3.2 Тіло обертання

Якщо напрямною кривою руху контуру служить коло або його дуга, то одержимо тіло обертання. Нехай вісь обертання проходить через точку \mathbf{p}_0 , а її напрямком характеризують одиничним вектором \mathbf{i} . Тоді бічну грань тіла обертання, що відповідає кривій $\mathbf{c}_i(u)$, описуватимуть поверхнею

$$\mathbf{r}_i(u, v) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{r}_{3i}(u) + \cos v \mathbf{r}_{1i}(u) + \sin v \mathbf{r}_{2i}(u) \quad (5.30)$$

$$u_{i \min} \leq u \leq u_{i \max}, \quad 0 \leq v \leq \alpha$$

де $\mathbf{r}_{3i}(u) = (\mathbf{c}_i(u) - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{i}$ - складова вектору $\mathbf{c}_i(u) - \mathbf{p}_0$; паралельна осі обертання; $\mathbf{r}_{1i}(u) = \mathbf{c}_i(u) - \mathbf{p}_0 - \mathbf{r}_{3i}(u)$ - складова вектору $\mathbf{c}_i(u) - \mathbf{p}_0$, перпендикулярна осі обертання; $\mathbf{r}_{2i}(u) = \mathbf{i} \times (\mathbf{c}_i(u) - \mathbf{p}_0)$ - вектор, ортогональний першим двом векторам, довжина якого дорівнює

довжині вектору $\mathbf{r}_1(u)$.

Криву $\mathbf{c}_i(u)$ описують радіус-вектором (5.30).

Вісь обертання не повинна перетинати бічні грані. Визначимо позитивний напрямок осі обертання. Нехай ми перебуваємо з того боку площини контуру, звідки рух уздовж контуру в позитивному напрямку виглядає проти годинникової стрілки. За позитивний напрямок осі обертання приймемо напрямок, при погляді уздовж якого контур перебуває ліворуч.

Якщо кут обертання α дорівнює 2π , те оболонка тіла має топологію тору, у протилежному випадку - топологію призми. У першому випадку оболонка не має торцевих граней. Тіло обертання з топологією призми, побудоване по замкнутому контуру, представлено на рис. 5.13. Тіло обертання з топологією тору, побудоване по замкнутому контуру, представлено на рис. 5.14.

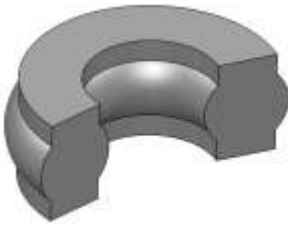


Рисунок 5.13 - Тіло обертання



Рисунок 5.14 - Тіло обертання з топологією тору

По замкнутій або незамкнутій складеній плоскій кривій може бути побудоване тонкостінне тіло обертання. Для його побудови використовують еквідистантні контури або складові криві. Тонкостінні тіла обертання представлені на рис. 5.15 і 5.16.



Рисунок 5.15 - Тонкостінне тіло обертання

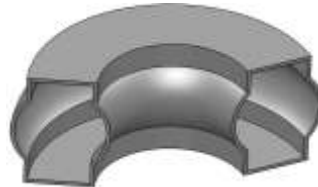


Рисунок 5.16 - Тонкостінне тіло обертання

По незамкнутій складеній плоскій кривій можуть бути побудовані тіла обертання, представлені на рис. 5.17 і 5.18. З кінців утворюючої лінії на вісь обертання опущені перпендикуляри, по яких побудовані відповідні грані. Для побудови тонкостінного тіла використовують еквідистантну складну криву. На відміну від попередніх прикладів тіла, представлені на рис. 5.17 і 5.18, дотикаються осі обертання. Такі тіла називатимемо сфероїдами.

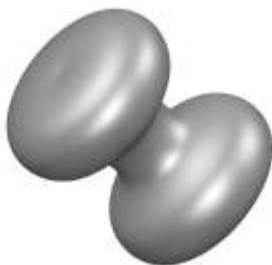


Рисунок 5.17 - Сфероїд



Рисунок 5.18 - Тонкостінний сфероїд

5.3.3 Кінематичне тіло

У всіх інших випадках форми напрямної кривої (окрім розглянутих у 5.3.1 і 5.3.2) одержимо кінематичне тіло. При русі плоского контуру уздовж напрямної кривої орієнтація контуру щодо напрямної може змінюватися або залишатися незмінною.

Якщо орієнтація твірної в просторі не змінюється, то контур виконує плоскопаралельний рух, залишаючись паралельним своєму початковому положенню, і ми одержимо тіло зсуву. Бічні грані тіла зсуву будують для кожної кривої (5.28) і описують поверхнею:

$$\mathbf{r}_i(u, v) = \mathbf{g}(v) + (\mathbf{c}_i(u) - \mathbf{g}(v_{\min}) - \mathbf{h}),$$

$$u_{i \min} \leq u \leq u_{i \max}, \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max}, \quad (5.31)$$

де \mathbf{h} - вектор прив'язки утворюючої до напрямної.

Вектор \mathbf{h} зміщує криву $\mathbf{c}_i(u)$ на деяку величину з її початкового положення щодо напрямної і зберігає цей зсув під час руху. Якщо $\mathbf{h} = 0$, то зберігається початкове положення утворюючої кривої щодо початкової точки напрямної кривої. Тіло

зсуву завжди має торцеві грані.

Якщо орієнтація контуру в просторі при русі змінюється, зберігаючи деякий заданий кут між площею контуру й дотичною до напрямної кривої, то ми одержимо тіло замітання. Бічні грані тіла замітання будують для кожної кривої (5.28) і описують поверхнею:

$$\mathbf{r}_i(u, v) = \mathbf{g}(v) + \mathbf{M}(v) \cdot (\mathbf{c}_i(u) - \mathbf{g}(v_{\min}) - \mathbf{h}),$$

$$u_{i \min} \leq u \leq u_{i \max}, \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max}, \quad (5.32)$$

де $\mathbf{M}(v)$ - матрична функція.

Якщо напрямна крива замкнута, то одержимо кінематичне тіло з топологією тору. Якщо напрямна крива не замкнута, то одержимо кінематичне тіло з топологією призми. Бічні грані кінематичного тіла (тіла зсуву або тіла замітання) не повинні перетинати самі себе. Ця вимога призводить до того, що напрямна крива тіла зсуву не може бути замкнутою. Тіло зсуву представлено на рис. 5.19, а тіло замітання – на рис. 5.20.



Рисунок 5.19 - Тіло зсуву



Рисунок 5.20 - Тіло замітання



Рисунок 5.21 - Тонкостінне тіло замітання

На рис. 5.21 представлено тонкостінне кінематичне тіло, побудоване по незамкнутій твірній і замкнутій напрямній.

Для побудови граней розглянутих тіл потрібно знати двовірний контур $\mathbf{c}(t)$, місцеву площину \mathbf{p} , \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , напрямну криву $\mathbf{g}(u)$ і інші необхідні параметри

(товщину стінки для тонкостінного тіла, спосіб руху контуру - плоскопаралельний або ортогональний).

5.4. Побудова тіла по плоским перерізам

Багато деталей можна побудувати по їх плоским перерізам у певних місцях. Нехай є кілька плоских контурів $c_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, однаково орієнтованих, розташованих на деякій відстані один від одного, складених з однакового числа кривих. Побудуємо тіло, перерізи якого обмежені даними контурами. Тіло має дві торцеві грані, що побудовані на крайніх контурах. Торцеві грані тіла є площинами, які обмежені одним із крайніх контурів. Бічними гранями оболонки тіла можуть бути поверхні, що згладжують, або просто поверхні. Їх кількість дорівнює кількості кривих у контурі. У кожній бічній грані є одна крива з кожного контуру. Ці криві називатимемо відповідними. Між кривими в контурах повинна бути встановлена відповідність, наприклад, за порядковим номером кривої в контурі. Тіло, побудоване по плоских перерізах, представлено на рис. 5.22.

У загальному випадку всі контури, за винятком торцевих, можуть бути неплоскими. Тіло, побудоване за плоскими перерізами, може бути замкнутим і мати топологію тору. Тіло, побудоване по перерізах, описуваних незамкнутими лініями, представлено на рис. 5.23. По незамкнутих лініях у будь якому випадку будують замкнуті контури, у яких використовують еквідистантні криві.



Рисунок 5.22 - Тіло, побудоване по плоским перерізам



Рисунок 5.23 - Тіло, побудоване по плоским перерізам

5.5. Тіло у формі листа

На основі поверхні довільної форми можна побудувати тіло у формі листа кінцевої товщини. Нехай задано поверхню $\mathbf{b}(u, v)$. Обравши товщину листа h , побудуємо еквідистантну до неї поверхню

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{b}(u, v) + h\mathbf{m}(u, v), \quad (5.33)$$

де $\mathbf{m}(u, v)$ - нормаль до поверхні $\mathbf{b}(u, v)$.

На цих поверхнях побудуємо дві основні грані листового тіла. Інші (бічні) грані побудуємо на лінійчатих поверхнях, однією базовою лінією яких є гранична лінія на поверхні $\mathbf{b}(u, v)$, а другою - відповідна їй лінія на поверхні $\mathbf{r}(u, v)$. Якщо область визначення параметрів поверхні $\mathbf{b}(u, v)$ має прямокутну форму, то листове тіло буде мати чотири бічні грані. У загальному випадку листове тіло буде мати стільки бічних граней, скільки ліній є у двомірних контурах, що описують область визначення параметрів поверхні $\mathbf{b}(u, v)$. Напрямок нормалей основних граней є протилежним один до одного у відповідних точках. Якщо поверхня $\mathbf{b}(u, v)$ є замкнутою за одним із параметрів, то листове тіло матиме форму труби і топологію тору. Якщо поверхня замкнута за обома параметричними напрямками, то одержимо тіло з порожнечою усередині. Таке тіло матиме зовнішню оболонку на основі поверхні $\mathbf{r}(u, v)$ і внутрішню оболонку на основі поверхні $\mathbf{b}(u, v)$.

Векторне зображення тіла у формі листа, побудованого по NURBS поверхні, обмеженої контурами, представлено на рис. 5.24, а його тонове зображення - на рис. 5.25.

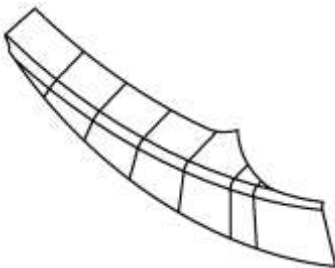


Рис. 5.24 - Тіло у формі листа



Рис. 5.25 - Тіло у формі листа

За допомогою тіл у формі листа можна моделювати деталі кузова автомобіля та фюзеляжу літака. У структурі даних тіла досить мати базову поверхню $\mathbf{b}(u, v)$ і товщину тіла h . Тіло, побудоване по перерізам, і тіло у формі листа, так само як всі розглянуті тіла, є заготівками для моделей деталей. Подальше моделювання деталей пов'язане з операціями над тілами.

5.6. Булеві операції над тілами

Над тілами, як і над іншими геометричними об'єктами, можна виконувати операції - сукупність дій над одними або декількома початковими тілами, що призводить до утворення нового тіла. Одними з основних операцій для двох тіл є булеві операції.

Булевими операціями називають операції об'єднання, перетинання і віднімання тіл, оскільки вони виконують однойменні операції над внутрішніми об'ємами тіл (над безліччю точок простору, що перебувають усередині тіл). Булеву операцію об'єднання тіл позначатимемо формулою $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2$, де \mathbf{S}_1 і \mathbf{S}_2 - початкові тіла, \mathbf{S} - результуюче тіло. Булеву операцію перетинання тіл позначатимемо формулою $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2$. Булеву операцію віднімання тіл позначатимемо формулою $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2$. У порядку проходження тіл-операндів називатимемо їх першим тілом і другим. Результатом операції об'єднання двох тіл є тіло, що має точки, які належать внутрішньому об'єму першого або другого тіла. Результатом операції перетинання двох тіл є тіло, що має точки, які належать внутрішньому об'єму, як першого, так і другого тіла. Результатом операції віднімання двох тіл є тіло, що має точки, які належать внутрішньому об'єму тільки першого тіла.

На рис. 5.26 представлені початкові тіла для булевої операції,

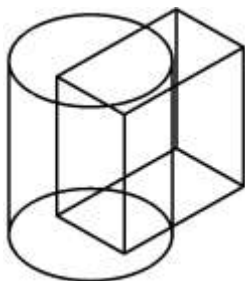


Рисунок 5.26 - Два початкових

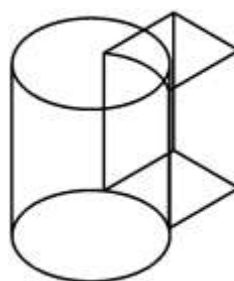


Рисунок 5.27 – Об'єднання тіл

на рис. 5.27 – результат операції об'єднання тіл, на рис. 5.28 – результат операції перетинання, на рис. 5.29 і рис. 5.30 – результати операції віднімання тіл.

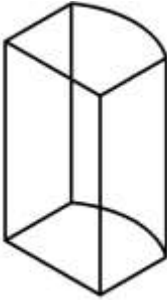


Рисунок 5.28 -
Перетин тіл

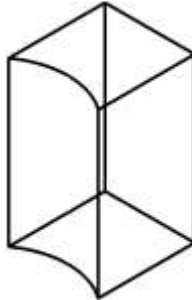


Рисунок 5.29 -
Різниця тіл

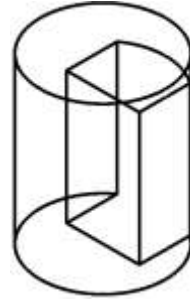


Рисунок 5.30 -
Різниця тіл

Операцію віднімання тіл можна звести до операції перетинання тіл. Для цього потрібно вивернути друге тіло навиворіт і знайти точки його об'єму, які одночасно належать до об'єму першого тіла. Вивернуте навиворіт тіло S будемо позначати S^- . При вивертанні тіла навиворіт внутрішні боки граней стають зовнішніми боками, а зовнішні – внутрішніми. Напрямки циклів змінюються на протилежні, у результаті чого внутрішнім об'ємом тіла стає та частина простору, яка до цього перебувала зовні тіла. Математично операцію віднімання приводять до операції перетинання тіл $S = S_1 - S_2 = S_1 \cap S_2^-$.

Конструктор при проектуванні використовує операції об'єднання і віднімання (технології машинобудування вони називаються по-іншому, наприклад, операції зварювання і свердління), а математичний апарат виконує відповідно операції об'єднання і перетинання. Всі булеві операції мають багато спільного і виконуються за єдиним алгоритмом.

5.6.1 Об'єднання тіл

Розглянемо булеву операцію об'єднання тіл. Коротко суть операції можна описати таким чином: потрібно знайти лінії перетину граней тіл, видалити ту частину першого тіла, що

потрапила усередину другого тіла і ту частину другого тіла, що потрапила усередину першого тіла, а із усього іншого побудувати нове тіло. Операцію умовно розіб'ємо на три етапи. На першому етапі побудуємо лінії перетину поверхонь граней і на їх базі - нові ребра. Побудовані нові ребра називатимемо ребрами перетину, а ребра тіл – старими ребрами. На другому етапі визначимо точки перетину нових ребер зі старими і у цих точках розріжемо старі ребра на кілька ребер. На третьому етапі операції перешикуємо цикли граней, що перетинаються. Після цього додамо до граней тіл, які перетинаються, грані, топологічно зв'язані з ними. Розглянемо етапи побудови тіла більш докладно.

Перший етап операції об'єднання тіл почнемо з того, що побудуємо лінії перетину кожної грані першого тіла з кожною гранню другого, якщо такі є. Для цього використовуємо алгоритм перетинання поверхонь граней. Нехай грані першого тіла описують поверхнями

$$\mathbf{r}_i(u_i, v_i), i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.34)$$

а грані другого тіла описують поверхнями

$$\mathbf{s}_j(u_j, v_j), j = 1, 2, \dots, n... \quad (5.35)$$

На базі ліній перетину граней першого і другого тіл

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv}(t) &= [u_i(t) \ v_i(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{uv}(t) \in \mathbf{r}_i(u_i, v_i), \\ \mathbf{l}_{ab}(t) &= [a_j(t) \ b_j(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{ab}(t) \in \mathbf{s}_j(u_j, v_j), \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$t_{\min} \leq t \leq t_{\max},$$

побудуємо ребра перетину. При цьому ребрам перетину дамо напрямок векторного добутку нормалі грані першого тіла з нормаллю грані другого тіла: $\mathbf{t}_{\text{edge}} = \mathbf{m}_r \times \mathbf{m}_s$. Напрямок ребра визначають ознакою збігу напрямку похідної лінії перетину з необхідним напрямком ребра. За позитивний напрямок нормалі грані приймемо напрямок назовні тіла. Нормаль грані може збігатися з нормаллю її поверхні або мати протилежний напрямок залежно від ознаки їх збігу. На рис. 5.31 представлені напрямки ребер перетину грані першого тіла із двома гранями другого тіла.

Ребра перетину повинні бути побудовані таким чином, щоб

вони повністю лежали усередині циклів граней початкових тіл.

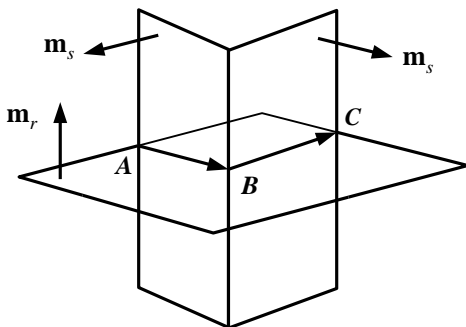


Рисунок 5.31 - Напрямок ребер перетинання граней тіл

Ребра перетину можуть підходити до меж грані тільки своїми кінцями. У точках A , B і C (рис. 5.31) старі ребра граней повинні бути розбиті кожне на два ребра, оскільки до результуючого тіла ввійде тільки частина початкової грані.

На другому етапі розріжемо старі ребра тіла, до яких підходять

ребра перетину. Різання старого ребра здійснюють шляхом розсічення кривої, на якій базується ребро. З однієї кривої одержимо дві, які у сукупності замінюють початкову криву ребра.

Одна з цих кривих залишиться геометричним носієм ребра, що розрізують, а на базі другої побудуємо нове ребро, яке одержить від початкового ребра всю необхідну інформацію. Як було сказано, кожне ребро будують на базі кривої перетину поверхонь (5.1). Криву перетину поверхонь утворюють дві поверхні і дві відповідні їм двомірні криві. Розсіченню підлягають саме двомірні криві на двох різних поверхнях. Як до, так і після розсічення ці криві повинні мати однакові області визначення параметрів і відповідність точок при всіх значеннях параметру.

Точки перетину нового ребра зі старим ребром грані шукають як точки перетину двомірних кривих, заданих на спільній для них площині параметрів. Від кожного ребра у формулу для точок перетину ліній входить по одній двомірній кривій, які потрапляють до лінії перетину. Параметри точок перетину ребер і самі координати кривих, які є параметрами поверхні, повинні бути визначені із заданою точністю.

Якщо ребро, яке розрізають, базується на кривій перетину, що задана окремими точками (двомірні лінії є ламаними і точно співпадають в просторі тільки в характеристичних точках), то перш ніж розрізати таку криву, потрібно в обидві лінії вставити

додаткові точки, яким відповідають точки перетину трьох поверхонь - двох поверхонь, що лежать по обидва боки ребра, яке розрізають, і поверхні грані іншого початкового тіла. Наприклад, якщо ріжуть лінію перетинання поверхонь $\mathbf{r}_i(u_i, v_i)$, $\mathbf{r}_n(u_n, v_n)$, поверхнею $\mathbf{s}_j(a_j, b_j)$, то в лінії $\mathbf{l}_{iv}(q) = [u_i(q) + v_i(q)]^T$ і $\mathbf{l}_{nv}(q) = [u_n(q) + v_n(q)]^T$ потрібно вставити додаткові двомірні характеристичні точки, що відповідають перетину поверхонь $\mathbf{r}_i(u_i, v_i)$, $\mathbf{r}_n(u_n, v_n)$, $\mathbf{s}_j(a_j, b_j)$. Задача перетину трьох поверхонь зводиться до рішення системи шести скалярних рівнянь відносно шести параметрів $u_i, v_i, u_n, v_n, a_j, b_j$. Початкове наближення рішення відоме досить точно.

Оскільки кожне ребро початкових тіл входить у цикли двох суміжних граней, то після різання ребер початкових тіл необхідно зкоректувати ці цикли з урахуванням розрізаних ребер.

Після перших двох етапів одержують сукупність ребер перетину, орієнтованих певним чином, які стикаються один з одним і з ребрами початкових тіл тільки у вершинах. Далі необхідно перебудувати цикли граней, які перетнулися.

Третій етап завершує булеву операцію. Для того, щоб кожна з представлених на рис. 5.31 граней розрізати на частини, потрібно перебудувати її цикли і відповідно до них змінити контури, які описують область визначення параметрів поверхні грані. На рис. 5.32 представлені дві грані, які перетнулися, (тонкими лініями зі стрілками показано напрямки циклів граней вихідних тіл) і ребро перетинання.

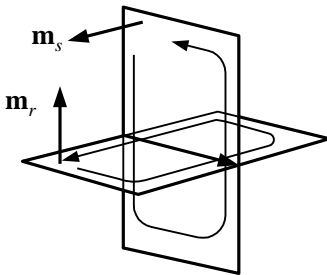


Рисунок 5.32 - Початкові грані тіла

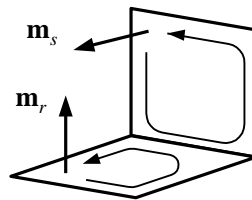


Рисунок 5.33 - Обрізані грані

На рис. 5.33 представлені ті частини граней, які увійдуть до об'єднання тіл. Стрілками показано напрямок перебудованих циклів граней тіл. Кожний цикл є списком ребер у порядку їх проходження і списком прапорів орієнтації цих ребер у циклі.

З рисунка видно, що за прийнятою орієнтацією ребер перетину ($t_{\text{edge}} = \mathbf{m}_r \times \mathbf{m}_s$) у цикли граней першого тіла вони увійдуть із негативним прапором, а в цикли граней другого тіла – з позитивним. Старі ребра початкових тіл, які збережуться у кінцевому (результуючому) тілі, увійдуть у перебудовані цикли зі збереженням своїх прапорів. При перебудові циклів граней, які перетнулися, використовуватимемо наступний алгоритм.

Розглянемо одну із двох граней, які перетнулися і належать першому тілу. Беремо будь-яке ребро перетинання розглянутої грані та починаємо з нього щикувати список ребер циклу. Ребро перетину повинно увійти до циклу грані першого тіла з негативним прапором, отже, цикл матиме напрямок, протилежний першому ребру. Для продовження циклу серед ребер перетину і серед старих ребер грані шукаємо всі ребра, що стикуються з даним ребром у його початковій вершині. Серед знайдених ребер виберемо те, що лежить ліворуч від інших (загортає вліво на більший кут у порівнянні з іншими знайденими ребрами, якщо дивитися уздовж циклу із зовнішнього боку грані). Обране ребро ставимо до списку циклу. Якщо ребро є старим, то воно зберігатиме свій прапор у циклі. Якщо ребро є ребром перетину, то воно отримає негативний прапор. Ребра перетину мають переважне право бути обраними відносно старих ребер. Тобто, якщо лівіше інших виявилися два співпадаючих ребра, одне з яких є старим, а інше – ребром перетину, то для продовження циклу обирають ребро перетину.

Процес перебудування циклу грані продовжуватимемо доти, поки цикл не замкнеться. На цьому побудову чергового циклу закінчують. Якщо у розглянутій грані при побудові циклу використані не всі ребра перетину, то з будь-якого ребра перетину, яке залишилося, починаємо будувати ще один цикл грані. Цикли перебудовуємо доти, поки не використаємо всі ребра перетину. Таким чином побудуємо кілька нових циклів розглянутої грані першого тіла.

Пошук ребер, що стикуються, і визначення кута повороту в точці стику зручно виконувати по двомірних кривих ребер грані.

При цьому можна працювати навіть із такими ребрами, які в просторі стягнуті в точку (наприклад, ребро у вершині конусу або полюсі сфери). На рис. 5.34 показано, що з новим ребром BA у точці A стикуються кілька ребер. У цьому випадку для продовження циклу, початого з ребра перетину BA , варто вибрати ребро AC .

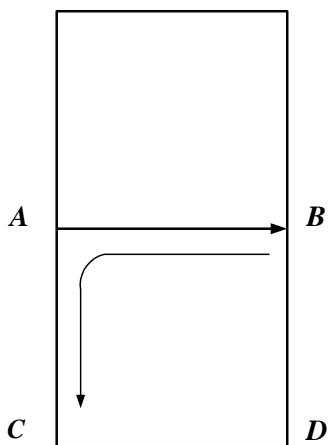


Рисунок 5.34

Заново побудовані цикли розсортуємо за групами, кожна з яких складатиметься із зовнішнього циклу і внутрішніх циклів, що входять до нього. У розглянутій грані можуть залишитися недоторканими один або декілька старих циклів. Недоторканими називатимемо старі цикли грані, жодне ребро яких не увійшло в перебудовані цикли. Серед старих недоторканих циклів відберемо ті, які необхідно долучити до складу опису перебудованої грані. Ними є старі внутрішні цикли грані, що лежать усередині нових зовнішніх циклів. Ще потрібно визначити, чи варто залучати в результат старий зовнішній цикл

грані, якщо він залишився недоторканим. Це необхідно зробити, якщо для деяких нових внутрішніх циклів не знайдено новий зовнішній цикл, і вони лежать усередині старого зовнішнього циклу. Сортування циклів зручно виконувати за допомогою двомірних контурів, які відповідають кожному циклу.

Якщо в результаті сортування зовнішніх циклів вийшло більше одного, то це означає, що з початкової грані в результаті операції утворилося декілька граней. На рис. 5.35а - 5.38а приведені варіанти початкових граней першого тіла, на рис. 5.35б - 5.38б – грані з додаванням ребер перетину (ребра перетину виділені), а на рис. 5.35в - 5.38в – грані, які утворені у результаті виконання операції.

На рис. 5.35 показано, що грань із двома циклами була розрізана, в результаті чого утворилася одна грань з одним циклом, а на рис. 5.36 – із грані з двома циклами утворилися дві грані.

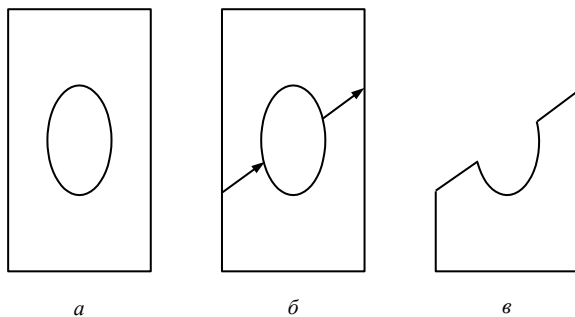


Рисунок 5.35 - Початкова грань (а), грань з додаванням ребер перетину (б), результат операції (в)

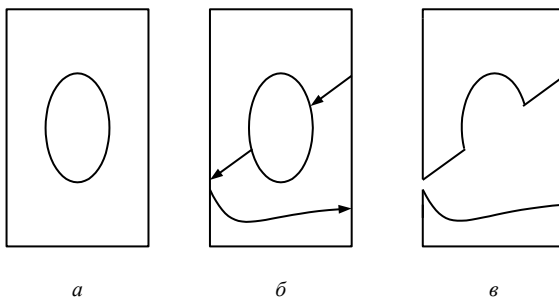


Рисунок 5.36 - Початкова грань (а), грань з додаванням ребер перетину (б), результат операції (в)

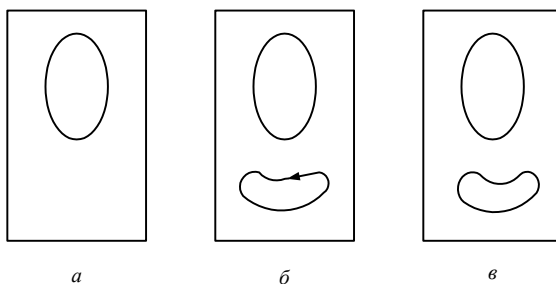


Рисунок 5.37 - Початкова грань (а), грань з додаванням ребер перетину (б), результат операції (в)

У прикладі, представленому на рис. 5.37, треба було використовувати старий зовнішній і внутрішній цикли. На рис. 5.38 з однієї грані утворено дві грані, причому для однієї з них треба було використовувати старий зовнішній цикл.

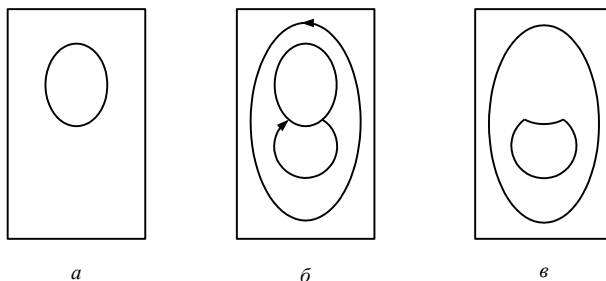


Рисунок 5.38 - Початкова грань (а), грань з додаванням ребер перетину (б), результат операції (в)

Описане перебудування циклів виконують для кожної перетнутої грані першого тіла.

З гранями другого тіла, які є перетнутими, вчинемо аналогічно тому, як було зроблено з гранями першого тіла, але з однією невеликою різницею. *Ребра перетину повинні увійти до перебудованих циклів граней другого тіла з позитивним прапором* (у перебудовані цикли граней першого тіла вони увійшли з негативним прапором). У цьому і є різниця перебудови циклів граней другого тіла. Всі інші дії над гранями першого і другого об'єднаних тіл однакові.

Ми перебудували перетнуті грані об'єднаних тіл. Залучимо їх в оболонку результуючого тіла. Для одержання результуючого тіла залишається до цих граней в оболонку тіла додати не перетнуті в операції грані, які топологічно пов'язані з перетнутими гранями. Для цього будемо брати послідовно ребра, які входять в оболонку нового тіла, і залучати в оболонку суміжні грані ребер (якщо вони там відсутні). Продовживши ці дії для ребер всіх доданих граней, одержимо оболонку результуючого тіла.

5.6.2 Перетин тіл

Коротко суть булевої операції перетину тіл можна описати

таким чином: потрібно знайти лінії перетину тіл, видалити ту частину першого тіла, що не потрапила всередину другого, і ту частину другого тіла, що не потрапила всередину першого, і із усього іншого побудувати нове тіло.

Ця операція має багато спільного з операцією об'єднання тіл. Повернемося до рис. 5.31. На ньому представлені грані, які перетинаються: одна грань першого тіла та дві грані другого тіла. Грані розрізають одна одну, так що до результуючої оболонки входять тільки частини цих граней.

До перетину тіл (рис. 5.39, 5.40) входить частина грані першого тіла, що лежить всередині другого тіла, і частина грані другого тіла, що лежить всередині першого (в об'єднання тіл увійшла частина грані першого тіла, що лежить поза другим тілом, і частина грані другого тіла, що лежить поза першим). У цьому і полягає основна різниця операцій об'єднання і перетину тіл.

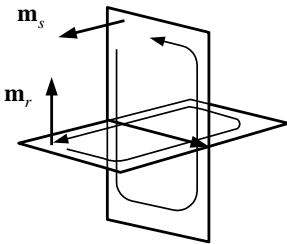


Рисунок 5.39 - Початкові грані

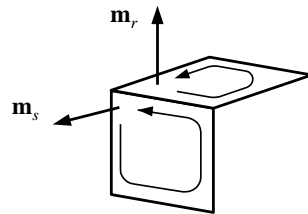


Рисунок 5.40 - Перебудовані грані перетину тіл

Операцію розіб'ємо на три етапи. Перший і другий етапи операції перетину тіл повністю співпадають з відповідними етапами операції об'єднання тіл.

Третій етап операції перетину тіл виконують аналогічно третьому етапу операції об'єднання тіл, при цьому різниця полягає у тому, з яким прапором входять до циклів ребра перетину. Ребра перетину входять до перебудованих циклів граней першого тіла з позитивним прапором, а в перебудовані цикли граней другого тіла - з негативним прапором (в об'єднанні тіл прапори ребер перетину в циклах мають протилежне значення). Всі інші дії над гранями обох тіл в обох операціях однакові.

5.6.3 Різниця тіл

Коротко зміст булевої операції віднімання тіл можна описати таким чином: потрібно знайти лінії перетину тіл, відняти ту частину першого тіла, що потрапила усередину другого, і ту частину другого тіла, що не потрапила усередину першого, і із усього іншого побудувати нове тіло.

Булеву операцію віднімання тіл зводять до булевої операції перетину зменшуваного тіла і вивернутого навиворіт тіла, що віднімається. Вивернуте навиворіт тіло можна одержати з початкового тіла шляхом переорієнтації напрямків нормалей граней і напрямків циклів граней. Переорієнтацію напрямку нормалі грані здійснюють зміною ознаки збігу нормалі поверхні і нормалі її грані. Переорієнтацію напрямку циклу грані здійснюють перебудуванням списку ребер (зміною на зворотний порядок проходження ребер у списку) і заміною прапорів ребер у списках на протилежні. Внутрішнім об'ємом вивернутого тіла є частина простору, що перебуває поза його оболонкою. Тому при перетині зменшуваного тіла і вивернутого навиворіт тіла, що віднімається, результуюча оболонка міститиме ту частину об'єму зменшуваного тіла, що лежить поза тілом, яке віднімається.

5.6.4 Перетнуті ребра

Побудова ребер перетину є найбільш трудомісткою і потребуючою певної точності операцією в процесі виконання булевих операцій. Ребра перетину не повинні мати частин, що виступають за межі грані, і повинні обов'язково стикуватися або один з одним або зі старими ребрами граней. При коректному виконанні операції перетину поверхонь ці умови забезпечуються. Ребра перетину не повинні перетинатися поза крайніми точками.

У більшості випадків нові ребра не перетинаються, але в деяких окремих випадках це можливо. На рис. 5.41 представлені два циліндричних тіла однакового діаметру, осі яких перетинаються - хрест із циліндрів. При булевому об'єднанні цих тіл можлива ситуація, коли будуть побудовані всього два замкнутих ребра перетину.

Такі ребра мають дві точки перетинання: A і B , принаймні, одна з яких не буде співпадати з вершинами ребер, а буде лежати

десь на ребрі. Точки перетину ребер лежать у точках торкання циліндрів. Ці ребра повинні бути розрізані в точках A і B та в їх частинах повинна бути уточнена орієнтація, оскільки при проходженні точки торкання поверхонь у цьому випадку векторний добуток нормалей до них, за яким орієнтують нові ребра, міняє свій напрямок на протилежний. Виявити перетин нових ребер можна по перетину кривих на поверхнях, з яких складається лінія перетину.

5.6.5 Співпадаючі ребра

Описаний алгоритм виконання булевих операцій працює коректно, якщо ребра перетину не співпадають з ребрами початкових тіл. У іншому випадку він потребує уточнення. Розглянемо приклади.

У булевих операціях можливий випадок, коли яка-небудь грань одного тіла перетинає інше тіло по його ребру. Можливий також випадок, коли при побудові ребер перетину граней одного тіла з гранями іншого тіла одержують два нових ребра, які співпадають у просторі між собою і з ребром одного з тіл. Всі ребра є різними, оскільки в них стикуються різні грані. На рис. 5.42 представлені два тіла, при виконанні булевої операції над якими ребра перетину співпадають з ребрами меншого тіла.

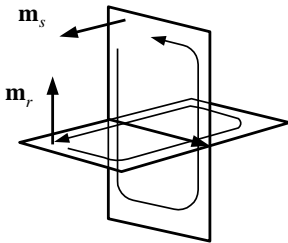


Рисунок 5.41 - В точках A і B нормалі граней співпадають

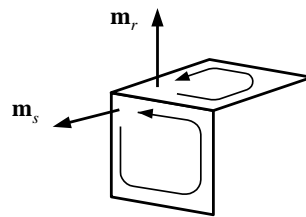


Рисунок 5.42 - Співпадання ребер перетину з ребрами меншого розміру

Дотримуючись загального алгоритму, у цьому випадку одержимо вісім ребер перетину, половина з яких повинна бути

виключена (або не повинна бути побудована).

5.6.6 Правило для ребер перетину

За наявності ребер перетину, які співпадають з ребрами граней початкових тіл, і в деяких інших випадках виконуватимемо наступну перевірку. Побудуємо в площині кожної із двох перетнутих граней по два вектори, ортогональні ребру перетину. На рис. 5.43 це вектори \mathbf{a}_1 і \mathbf{b}_1 для грані з нормаллю \mathbf{m}_1 і вектори \mathbf{a}_2 і \mathbf{b}_2 для грані з нормаллю \mathbf{m}_2 . Вектори \mathbf{a}_1 і \mathbf{a}_2 повертають ліворуч від ребра перетину у відповідних площинах, а вектори \mathbf{b}_1 і \mathbf{b}_2 – праворуч від ребра перетину у відповідних площинах. Якщо грань не має продовження за ребро перетину (ребро перетину частково або повністю співпадає з ребром тіла), то відповідний вектор приймемо рівним нулю (рис. 5.44). Використовуючи вектори \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , і нормалі \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_2 , визначимо, чи буде дане ребро перетину використане в операції або воно повинно бути виключене. Звернемо увагу на наступну обставину.

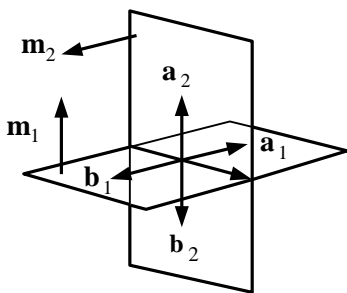


Рисунок 5.43 - Перетин граней

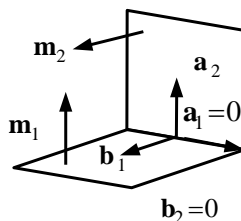


Рисунок 5.44 - Перетин граней по ребру

В операції об'єднання тіл грань першого тіла можна перебудувати, якщо вона має продовження праворуч від ребра перетину поза другим тілом, а грань другого тіла перебудовують, якщо вона має продовження ліворуч від ребра перетинання поза першим тілом. Таким чином, у булевій операції об'єднання тіл для ребра перетину повинні бути виконані умови:

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_2 > 0 \quad \text{і} \quad \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{b}_1 > 0. \quad (5.37)$$

У іншому випадку розглянуте ребро перетину у булевій операції об'єднання тіл будувати не слід (якщо воно побудовано, то повинно бути виключене).

У булевій операції перетину тіл грань першого можна перебудувати, якщо вона має продовження ліворуч від ребра перетину всередину другого тіла, а грань другого тіла перебудовують, якщо вона має продовження праворуч від ребра перетину всередину першого тіла. Таким чином, у булевій операції перетину тіл для ребра перетину повинні бути виконані умови:

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{b}_2 < 0 \quad \text{і} \quad \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{a}_1 < 0. \quad (5.38)$$

У іншому випадку розглянуте ребро перетину у булевій операції об'єднання тіл будувати не слід (якщо воно побудовано, то повинно бути виключене).

Як уже було сказано, ребра перетину мають переважне право відносно старих ребер тіла бути включеними у цикл, що перебудовується.

Оскільки булева операція віднімання тіл зводиться до операції перетину тіл, для неї повинне виконуватися правило (5.38) для вивернутої навиворіт оболонки тіла.

5.6.7 Приналежність точки простору всередині тіла

Для відповіді на питання, усередину або поза тілом продовжується грань іншого тіла від ребра перетину, потрібно визначити, чи належить деяка точка \mathbf{p} простору усередині тіла - класифікувати точку відносно тіла. Відомо, що нормаль кожної грані спрямована поза об'ємом тіла. Для точки \mathbf{p} знайдемо найближчу точку \mathbf{p}_0 на найближчій грані. Побудуємо вектор \mathbf{n} зі знайденої точки \mathbf{p}_0 у точку \mathbf{p} . Обчислимо нормаль \mathbf{m} тіла в точці \mathbf{p}_0 . Якщо точка \mathbf{p}_0 лежить на межі граней (є точкою ребра або вершини), то в якості нормалі \mathbf{m} тіла візьмемо середню нормаль граней, які з нею межують. Якщо $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \geq 0$, то точка \mathbf{p} належить внутрішньому простору тіла, а в іншому випадку - ні.

5.6.8 Грані, які перекриваються

У булевих операціях досить часто можна зустріти випадки часткового перекриття деяких граней двох початкових тел. На

рис. 5.45 представлені два тіла, деякі грані яких частково перекриваються.

У цьому випадку не всі ребра перетину граней увійдуть у булевий результат; деякі ребра повинні бути виключені (або не повинні будуватися). Результат об'єднання тіл представлений на рис. 5.46.

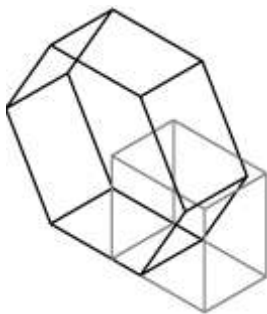


Рисунок 5.45 - Грані тіл, що перекриваються

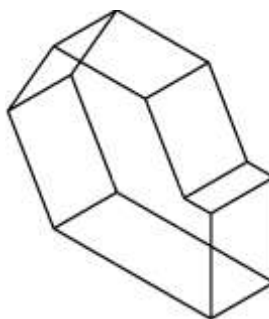


Рисунок 5.46 – Об'єднання тіл

Аналогічна ситуація виникає при виконанні булевої операції над двома співвісними циліндрами однакового радіуса та ще у багатьох випадках. Грані можуть перекриватися повністю, частково або всього лише по одній лінії. Нормалі \mathbf{m}_1 і \mathbf{m}_2 граней, які частково перекриваються, повинні бути однаково спрямовані в спільних точках. Грані, які перекриваються, це такі грані, які можна перенести на одну спільну поверхню. Таких граней може бути більше двох. За наявності у тіл-операндів граней, що перекриваються, всі ребра перетину цих граней повинні бути перевірені на предмет присутності їх у булевому результаті. В операції об'єднання тіл нам будуть потрібні тільки ті ребра перетину граней, що перекриваються, суміжні грані яких мають продовження поза одного з тіл. В операції перетину тіл нам будуть потрібні тільки ті ребра перетину граней, що перекриваються, суміжні грані яких мають продовження усередину одного з тіл.

Цикли граней, що перекриваються, повинні бути перебудовані за іншим алгоритмом. Насамперед, всі ребра цих граней повинні бути приведені до одного спільного носія (до

поверхні однієї з граней, що перекриваються). В операції об'єднання тіл старі ребра граней, що перекриваються, першого тіла, які лежать усередині другого тіла, і старі ребра граней, що перекриваються, другого тіла, які лежать усередині першого тіла, не увійдуть у результуюче тіло. В операції перетину тіл старі ребра граней, що перекриваються, першого тіла, які лежать поза другим тілом, і старі ребра граней, що перекриваються, другого тіла, які лежать поза першим тілом, також не увійдуть у результуюче тіло.

Побудову деякого циклу граней, що перекриваються, почнемо з ребра, яке точно повинне увійти в результат. Для продовження циклу серед ребер перетину і серед старих ребер грані, що залишилися, знайдемо всі ребра, які стикуються з даним ребром у його відповідній вершині. Серед знайдених ребер виберемо те, що лежить праворуч від інших (загортає вправо на більший кут у порівнянні з іншими знайденими ребрами, якщо дивитися уздовж циклу із зовнішнього боку грані). Вибране ребро ставимо в список циклу. Відмінність алгоритму полягає у тому, що при продовженні циклу ми вибираємо саме праве (а не саме ліве) ребро.

5.6.9 Тіла з декількома оболонками

Якщо будь-яке із тіл-операндів має порожнечі і, відповідно, і його описують декількома оболонками, то недоторкнуті операцією внутрішні (зовнішні) оболонки повинні бути перевірені на входження в оболонку булевого результату. У загальному випадку результуюче тіло також може мати кілька оболонок.

5.6.10 Дерево побудови тіл

Булеві операції над тілами показують необхідність залучення топологічних понять для побудови тіл.

Розглянуті в попередніх параграфах тіла називатимемо простими, на відміну від тіл, утворених у результаті операції, які називатимемо складними. Структура даних простих тіл має мінімум інформації, по якій можуть бути побудовані всі грані тіла. У структурі даних тіла, утвореного в результаті булевої операції, приймемо структури даних початкових тіл і тип булевої операції. Оболонки тіла завжди можуть бути побудовані за цією

інформацією. Таким чином, структура даних тіла, утвореного в результаті багаторазового виконання булевих операцій, буде мати дерево побудови. Результуюче тіло знаходиться в корені дерева, а його гілки починаються в простих тілах. Приклад дерева представлений на рис. 5.47. У вузлах дерева знаходяться тіла. Дерево має кілька ярусів. Операції між тілами позначені відповідними знаками. Операції виконують між тілами одного ярусу.

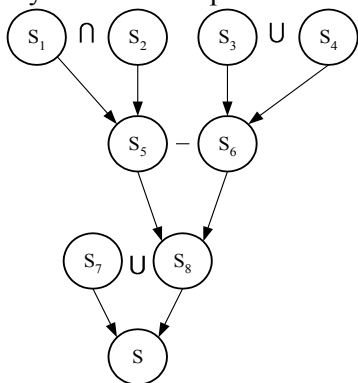


Рисунок 5.47 - Дерево побудови тіла

Структура даних тіла у вигляді дерева побудови може бути використана для всіх тіл - як для тіл, утворених у результаті деякої операції, так і для простих.

5.7. Різання тіла поверхнею

Якщо поверхня повністю перетинає тіло, то його можна розрізати цією поверхнею на дві частини. Результатом такої операції є нове тіло, що представляє собою частину початкового тіла, яке лежить по один або інший бік різальної поверхні. Позитивним боком називатимемо бік поверхні, у який спрямована нормаль до неї (якщо дивимося на позитивний бік поверхні, то нормаль спрямована на нас). Інший бік поверхні називатимемо негативним.

Операцію різання тіла поверхнею зведемо до однієї з булевих операцій. На базі поверхні побудуємо оболонку, яка складатиметься з однієї грані. Нехай нормаль цієї грані збігається з нормаллю поверхні. Побудовану незамкнуту оболонку розглядатимемо як деяке незакінчене тіло.

Нехай потрібно побудувати ту частину тіла, що лежить з позитивного боку різальної поверхні. У цьому випадку виконаємо булеву операцію віднімання із цього тіла незакінченого тіла, побудованого на основі ріжучої поверхні.

Нехай потрібно побудувати ту частину тіла, що лежить з

негативного боку різальної поверхні. У цьому випадку виконаємо булеву операцію перетину цього тіла з незакінченим тілом, побудованим на основі різальної поверхні.

На рис. 5.48 представлені: тіло, яке різє поверхня, її нормаль і ребра перетину граней тіла з поверхнею. При різанні тіла поверхнею виконується операція перетину тіла з частиною простору, що лежить по той або інший бік поверхні.

В окремому випадку тіло можна розрізати площиною. На рис. 5.49 представлені початкове тіло і різуча площина, а на рис. 5.50 – розрізане тіло.

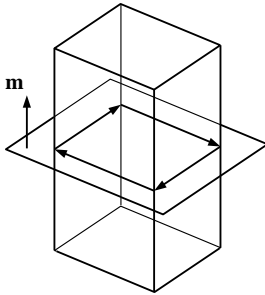


Рисунок 5.48 - Напрямок ребер перетину

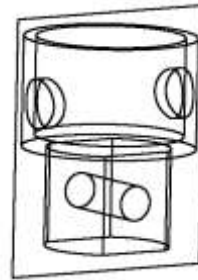


Рисунок 5.49 - Початкове тіло і різуча поверхня

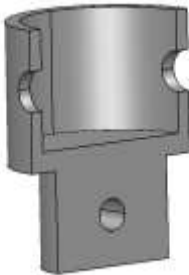


Рисунок 5.50 - Розрізане тіло

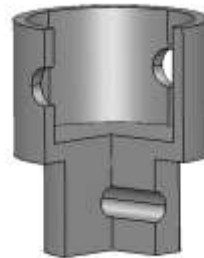


Рисунок 5.51 - Складний розріз тіла

За допомогою розглянутої операції можна одержати складний розріз тіла. Для цього оболонка незакінченого тіла повинна складатися з декількох граней, які стикуються між собою.

Щоб одержати складний розріз візьмемо складову криву на площині і побудуємо по ній незакінчене тіло видавлювання так, щоб воно перетинало задане тіло необхідним чином. Далі виконаємо булеву операцію над заданим тілом і незакінченим тілом. Результат складного розрізу тіла представлено на рис. 5.51.

5.8. Побудова симетричного тіла

Нехай ϵ тіло і площина. Побудуємо тіло, симетричне даному тілу відносно даної площини. Початкове тіло називатимемо базовим.

Симетричне тіло буде дзеркальною копією даного тіла. Геометрію тіла описують точками, кривими і поверхнями, які в остаточному підсумку описують точками, векторами та скалярами. Побудову симетричного тіла в остаточному підсумку зводять до перетворення симетрії радіус-векторів точок, вільних векторів і скалярів. Скалярні величини при перетворенні симетрії не змінюються, вільні вектори змінюють свій напрямок, а точки - своє положення.

Нехай площину симетрії описують формулою

$$\mathbf{p}(x, y) = \mathbf{p}_0 + x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2, \quad (5.39)$$

де \mathbf{i}_1 і \mathbf{i}_2 - ортогональні вектори одиничної довжини.

Тоді матрицю перетворення симетрії тіла відносно цієї площини визначають за формулою

$$\mathbf{A} = 2 \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + 2 \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 - \mathbf{E}, \quad (5.40)$$

де $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1$ і $\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2$ - діадні добутки векторів.

Вільний вектор \mathbf{v}_0 після перетворення симетрії відносно цієї площини описуватиметься радіус-вектором

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_0. \quad (5.41)$$

Довільна точка \mathbf{r}_0 після перетворення симетрії відносно цієї площини описуватиметься радіус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}_0). \quad (5.42)$$

Після перетворення симетрії всі точки і лінії на поверхнях

залишаться незмінними. Нормалі поверхонь змінять свій напрямок на протилежний. Там, де нормаль грані і нормаль її поверхні у початковому тілі збігалися за напрямком, у дзеркальній копії матимуть протилежний напрямок, і навпаки: там, де нормаль грані і нормаль її поверхні у початковому тілі не збігалися за напрямком, у дзеркальній копії матимуть однаковий напрямок. Крім того, цикли граней дзеркальної копії матимуть напрямок, протилежний своїм оригіналам. Тому в гранях дзеркальної копії потрібно зробити зміну ознак збігу нормалі поверхні і нормалі її грані на протилежні значення та переорієнтувати цикли. Переорієнтація напрямку циклу грані здійснюється перебудуванням списку ребер (порядок проходження ребер у списку зворотний) і заміною прапорів ребер у списках на протилежні прапори. Таку ж переорієнтацію здійснювали і при вивертанні тіла навиворіт. Якщо виконати тільки перетворення геометричних даних тіла за матрицею (5.40), то одержимо дзеркальне відбиття тіла, вивернуте навиворіт. Таким чином, побудова симетричного тіла зводиться до перетворення його копії за матрицею (5.40) і вивертання його навиворіт (переорієнтації його граней).

Симетрія частини тіла. Нехай площина симетрії перетинає тіло. Уявимо, що оболонка тіла розрізана площиною, одна з відрізнаних частин вилучена, з іншої частини зроблена дзеркальна копія і склеєна з нею. В результаті одержимо тіло, симетричне відносно площини, яке складається з двох половинок, одна з яких збігається з частиною початкового тіла. Площиною симетрії може служити плоска грань початкового тіла. Побудова такого симетричного тіла має багато спільних моментів з різанням тіла на частині та операцією об'єднання тіл.

Не втрачаючи спільності, побудуємо симетричне тіло за його частиною, що знаходиться з позитивного боку площини - з того боку, у який спрямована нормаль площини. Операцію умовно розіб'ємо на три етапи.

На *першому етапі* побудуємо лінії перетину поверхонь граней тіла з площиною. Нехай перетнуті площиною грані тіла описують поверхнями $\mathbf{r}_i(u_i, v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді кожна лінія перетину складатиметься з пари двомірних кривих

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv}(t) &= [u_i(t) \ v_i(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{uv}(t) \in \mathbf{r}_i(u_i, v_i), \\ \mathbf{l}_{xy}(t) &= [x(t) \ y(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{xy}(t) \in \mathbf{p}(x, y), \end{aligned} \quad (5.43)$$

що мають спільний параметр t . Перша крива лежить на поверхні $\mathbf{r}_i(u_i, v_i)$, а друга - на площині симетрії. На базі ліній перетину побудуємо нові ребра (ребра перетину). За допомогою ознаки збігу напрямку ребра і його кривої перетину ребрам перетину дамо напрямок векторного добутку нормалі грані тіла з нормаллю до площини: $t_{\text{edge}} = \mathbf{m}_r \times \mathbf{m}_p$.

На *другому етапі* визначимо точки перетину нових і старих ребер тіла, у цих точках побудуємо вершини і цими вершинами розріжемо старі ребра на декілька ребер. Різання ребер описане в булевих операціях над тілами.

Далі побудуємо симетричну відносно площини копію частини оболонки тіла, яка лежить над площиною. Для цього побудуємо копію частини оболонки, перетворимо її за матрицею (5.40) та вивернемо її навиворіт. При вивертанні оболонки потрібно зробити зміну ознак збігу нормалі поверхні і нормалі її грані на протилежні значення та переорієнтувати цикли.

Залишається зшити симетричні половинки тіла по ребрах перетину тіла із площиною симетрії. Але спершу виконаємо заміну ліній на площині, які входять у криві перетину побудованих ребер, на лінії на симетричній оболонці. Для цього замість кривих (5.43) до ребер покладемо криві

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv}(t) &= [u_i(t) \ v_i(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{uv}(t) \in \mathbf{r}_i(u_i, v_i), \\ \mathbf{l}_{uv}'(t) &= [u_i(t) \ v_i(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{uv}'(t) \in \mathbf{r}_i'(u_i, v_i), \end{aligned} \quad (5.44)$$

Першу двомірну криву $\mathbf{l}_{uv}(t)$ кривої перетину збережемо недоторканою, а замість другої візьмемо двомірну криву $\mathbf{l}_{uv}'(t)$, яка є точною копією $\mathbf{l}_{uv}(t)$ і лежить на симетричній копії поверхні $\mathbf{r}_i(u_i, v_i)$. Тепер кожне ребро перетину базуватиметься на двох симетричних половинках шуканого тіла.

На *третьому етапі* перебудуємо цикли перетнутих площиною граней тіла. Перебудування циклів грані докладно описане в булевій операції об'єднання тел. Кожне ребро перетину

повинно увійти до циклу початкової грані з негативним прапором, а цикл її симетричної частини - з позитивним прапором.

До перетнутих граней тіла додамо неперетнуті грані, які топологічно пов'язані з першими, і відповідні симетричні копії. Таким чином одержимо оболонку симетричного тіла.

При побудові симетричної оболонки варто враховувати всі випадки збігу ребер перетину і старих ребер тіла та часткове перекриття граней, що описані в булевих операціях над тілами. Крім того, варто врахувати наявність декількох оболонок у початкового тіла.

На рис. 5.52 представлено початкове тіло і площина симетрії, а на рис. 5.53 – результат побудови симетричного тіла.



Рисунок 5.52 - Тіло і площина симетрії



Рисунок 5.53 - Симетричне тіло

5.9. Побудова еквідистантної оболонки тіла

За заданим тілом можна побудувати тіло з еквідистантною оболонкою. Оболонка нового тіла розташована на заданій відстані по нормалі від оболонки початкового тіла. Цю відстань називатимемо параметром еквідистанти і позначатимемо через h . Тіло, за яким будують тіло з еквідистантною оболонкою, називатимемо базовим, а нове тіло – еквідистантним.

Параметр еквідистанти цієї операції може приймати як позитивні, так і негативні значення. Якщо $h > 0$, то базове тіло розташовується усередині еквідистантного тіла, а якщо $h < 0$, то еквідистантне тіло розташовується усередині базового тіла.

Неприпустимими значеннями параметра є такі, при яких оболонка нового тіла стає самоперетинною або вироджуваною. Процес побудови оболонки еквідистантного тіла умовно розіб'ємо на чотири етапи.

На *першому етапі* для кожної грані базового тіла побудуємо еквідистантну грань. Еквідистантна грань базується на поверхні, еквідистантній до відповідної поверхні базового тіла. На рис. 5.54 показані три грані базового тіла, які мають загальну вершину A , та еквідистантні їм поверхні.

Кожна еквідистантна поверхня повинна бути продовжена до перетину з сусідніми еквідистантними поверхнями. Радіус-вектор еквідистантної поверхні визначають за формулою [1(3.14.1)]. На продовженні еквідистантної поверхні за межі області визначення параметрів її радіус-вектор обчислюватимемо за однією з формул [1(3.14.8)-(3.14.10)] залежно від замкнутості базової поверхні. Для побудови еквідистантного тіла нам залишається побудувати його вершини та ребра. Для цього необхідно знайти лінії перетину еквідистантних поверхонь. Кожна лінія перетину повинна починатися і кінчатися у вершині тіла.

На *другому етапі* побудуємо вершини еквідистантної оболонки. Розглянемо послідовно вершини базового тіла. У кожній вершині стикується кілька ребер. Нам потрібно знати, які ребра і які грані базового тіла стикуються в даній вершині. Вершині базового тіла відповідатимуть одна або декілька вершин еквідистантного тіла. У кожній вершині еквідистантного тіла стикуватимуться декілька ребер. Вершина еквідистантного тіла базується на точці перетину еквідистантних поверхонь.

Обчисливши цю точку, знайдемо параметри еквідистантних поверхонь, які перебуватимуть у якості початкових і кінцевих точок ліній перетину поверхонь.

На рис. 5.55 представлені точки перетину подовжених еквідистантних поверхонь, на яких базуватимуться вершини.

На *третьому етапі* побудуємо ребра еквідистантної оболонки. Розглянемо послідовно ребра базового тіла. Для кожного ребра побудуємо відповідне ребро еквідистантної оболонки тіла. Ребро базуватиметься на лінії перетину еквідистантних поверхонь.

Початкові і кінцеві точки ребер вже відомі з другого етапу. На рис. 5.56 показані лінії перетину подовжених еквідистантних

поверхонь, на яких базуватимуться ребра.

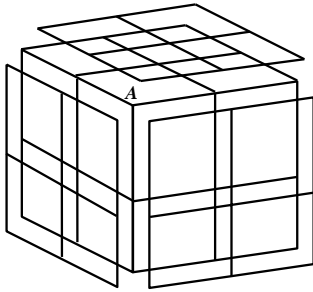


Рисунок 5.54 – Еквідистантні поверхні

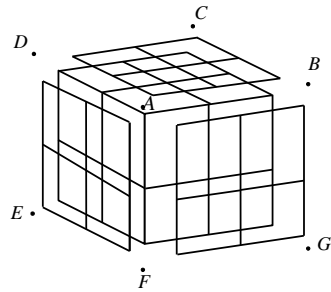


Рисунок 5.55 - Вершини еквідистантного тіла

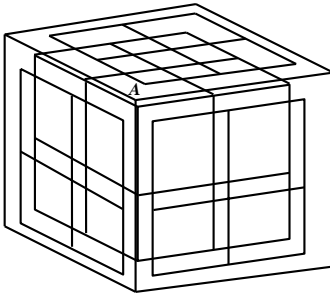


Рисунок 5.56 - Лінії перетину еквідистантних поверхонь

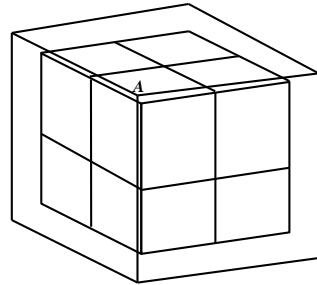


Рисунок 5.57 - Еквідистантні грані

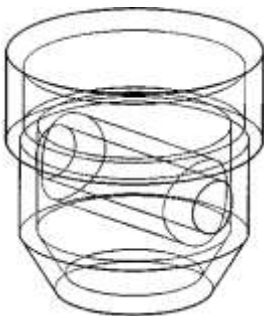


Рисунок 5.58 –
Еквідистантне тіло

На останньому, *четвертому етапі* побудуємо цикли еквідистантних граней (рис. 5.57). Цей процес аналогічний процесу перебудування циклів граней у булевих операціях.

Таким чином, одержимо оболонку еквідистантного тіла. Приклад побудови еквідистантного тіла представлений на рис. 5.58 (початкове тіло показане усередині тонкими лініями).

Зауважимо, що топологія

еквідистантного тіла (кількість вершин, ребер, граней та їх взаємозв'язок) не завжди збігається з топологією базового тіла.

Якщо у вершині базового тіла стикується більше трьох ребер (які не є швами), то в еквідистантному тілі цій вершині відповідатиме кілька вершин і нових ребер. На рис. 5.59 представлена піраміда і еквідистантне до піраміди тіло з негативним параметром еквідистанти, а на рис. 5.60 – аналогічна піраміда та еквідистантне піраміди тіло з позитивним A параметром еквідистанти.

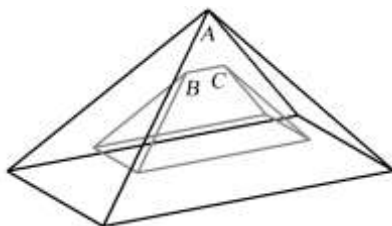


Рисунок 5.59 - Еквідистантна піраміда ($h < 0$)

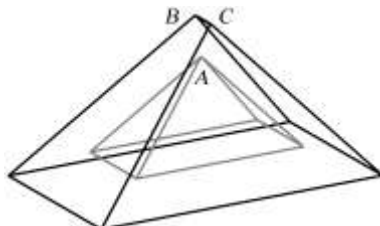


Рисунок 5.60 - Еквідистантна піраміда ($h > 0$)

У вершині A піраміди стикується чотири ребра.

В еквідистантному тілі даній вершині відповідає дві вершини B і C і одне додаткове ребро BP , що ми і бачимо на рис. 5.59 і рис. 5.60.

Можлива і інша ситуація, коли деякій вершині або деякому ребру базового тіла в еквідистантній оболонці не буде аналогу. У таких випадках топологія еквідистантного тіла відрізнятиметься від топології базового тіла.

Для обробки подібних ситуацій варто проаналізувати розташування сусідніх вершин і ребер.

5.10. Побудова тонкостінного тіла

Розглянемо побудову тонкостінних тіл двох типів. Тіла обох типів будують за деяким базовим тілом. Тіло першого типу матиме замкнуту порожнину всередині. Воно має дві оболонки, що ділять простір на три частини: одна з них лежить поза тілом, другу займає

тіло, а третя є внутрішньою порожниною тіла. Тіло другого типу представлятиме відкрите тонкостінне тіло, яке має одну оболонку. Тіло першого типу називатимемо закритим тонкостінним тілом, а тіло другого - відкритим тонкостінним тілом. Закрите тонкостінне тіло можна вважати окремим випадком відкритого тонкостінного тіла.

5.10.1 Закрите тіло

Закрите тонкостінне тіло з товщиною стінки h утворимо в такий спосіб. Побудуємо оболонку, еквідистантну оболонці базового тіла. Процес побудови еквідистантої оболонки був описаний при побудові еквідистантного тіла. Далі вивернемо навиворіт одну із цих оболонк.

Якщо $h > 0$, то вивернемо навиворіт оболонку базового тіла, якщо $h < 0$, то вивернемо навиворіт еквідистантну оболонку. Ці дві оболонки і утворять тонкостінне тіло. Закрите тонкостінне тіло можна представити згідно з рис. 5.58.

Дане тонкостінне тіло на відміну від інших розглянутих тіл є тілом з порожнечами. У загальному випадку тіло з порожнечами має декілька оболонк.

Одна з них є зовнішньою, а інші - внутрішніми і лежать усередині зовнішньої оболонки. Всі оболонки не повинні перетинатися. Вектор нормалі до зовнішньої оболонки спрямований поза об'ємом оболонки, а вектори нормалей до внутрішніх оболонк – усередину об'єму, обмеженого ними.

5.10.2 Відкрите тіло

Відкрите тонкостінне тіло будують на базі деякого тіла шляхом видалення однієї або декількох граней останнього та «надання граням, що залишилися, кінцевої товщини». Звичайно, грань не може мати товщину, тому до відкритої оболонки, що залишилася після видалення деяких граней, будують еквідистантну відкриту оболонку, а потім ці оболонки замикають частинами граней, які видаляють. У результаті виходить одна замкнута оболонка. На рис. 5.62 наведено приклад відкритого тонкостінного тіла ($h > 0$), побудованого шляхом розкриття однієї грані тіла, представленого на рис. 5.61.



Рис. 5.61 - Початкове тіло



Рис. 5.62 - Тонкостінне тіло

Розглянемо процес побудови оболонки відкритого тонкостінного тіла. Насамперед, розсортуюємо грані базового тіла на дві групи: до першої групи віднесемо грані базового тіла, які розкриваються, а до другої групи – інші грані базового тіла, які називатимемо такими, що зберігаються. Згрупуємо ребра базового тіла: до першої групи віднесемо ребра, по яких перетинаються між собою грані базового тіла, які розкриваються, а до другої групи – ребра граней базового тіла, що зберігаються. Процес побудови оболонки відкритого тонкостінного тіла має багато спільного з процесом побудови еквідистантного тіла.

Для кожної грані базового тіла, що зберігається, побудуємо еквідистантну грань. Поверхня кожної еквідистантної грані і кожної грані, що розкривається, повинна мати можливість бути продовженою до перетину з поверхнями сусідніх граней. Радіус-вектор еквідистантної поверхні визначають за формулою [1(3.14.1)]. На продовженні еквідистантної поверхні за межі області визначення параметрів її радіус-вектор обчислюватимемо за однією з формул [1(3.14.8)-(3.14.10)] залежно від замкнутості базової поверхні.

Далі розглянемо вершини граней базового тіла, які зберігаються (рис. 5.63). Кожній розглянутій вершині відповідатимуть одна або кілька вершин тонкостінного тіла. У кожній вершині тонкостінного тіла стикуватимуться кілька ребер. Вершина тонкостінного тіла базується на точці перетину



Рисунок 5.63 - Базове тіло

еквідистантних поверхонь або на точці перетину еквідистантних поверхонь з поверхнями граней, що розкриваються. Обчисливши ці точки, знайдемо параметри поверхонь, що перетинаються, які перебуватимуть у якості початкових і кінцевих точок ліній перетину поверхонь.

Розглянемо послідовно ребра граней базового тіла, що зберігаються, (ребра другої групи). Для кожного ребра побудуємо відповідне ребро тонкостінного тіла.

Для цього знайдемо лінії перетину еквідистантних поверхонь між собою і з поверхнями граней, що розкриваються. Початкові і кінцеві точки ребер відомі.

По побудованих вершинах перебудуємо ребра перетину граней, які розкриваються (ребра першої групи).

Далі вивернемо навиворіт частину граней. Якщо $h > 0$, то змінимо напрямки циклів і нормалей граней базового тіла, що зберігаються, а також напрямки циклів граней базового тіла, що розкриваються, на протилежні. Якщо $h < 0$, то змінимо на протилежні напрямки нормалей еквідистантних граней (циклів вони ще не мають).

На останньому етапі побудуємо цикли еквідистантних граней і перебудуємо цикли граней, що розкриваються. Таким чином, оболонка відкритого тонкостінного тіла складатиметься з граней, що зберігаються, еквідистантних до них граней і частин граней, що розкриваються.

Відкрите тонкостінне тіло може бути побудоване як назвні ($h > 0$), так і усередину ($h < 0$) від базового тіла. На рис. 5.64 представлено відкрите тонкостінне тіло, побудоване усередину від базового тіла шляхом розкриття трьох граней. Базове тіло представлено на рис. 5.63, а на рис. 5.65 – відкрите тонкостінне тіло, побудоване на основі цього ж базового тіла назвні від нього тіла шляхом розкриття тих же трьох граней (з більшою товщиною стінки).

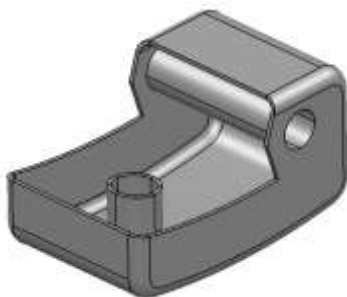


Рисунок 5.64 - Тонкостінне тіло, побудоване всередину від базового тіла

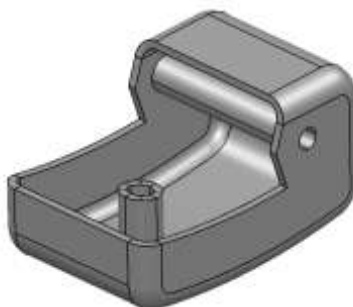


Рисунок 5.65 - Тонкостінне тіло, побудоване назовні від базового тіла

Операція побудови тонкостінного тіла поряд з булевими операціями є потужним засобом для побудови тіл складної форми. На рис. 5.66 показано відкрите тонкостінне тіло, побудоване на базі тіла, показаного на рис. 5.65, шляхом розкриття двох граней. На рис. 5.67 показаний розріз двома площинами цього тонкостінного тіла, на якому видно внутрішні порожнини тіла.

Тонкостінне тіло відноситься до складних. У його дерево побудови покладемо структуру даних початкового тіла, товщину стінки та список граней, які видаляють.

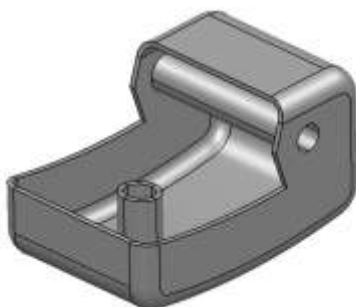


Рисунок 5.66 - Тонкостінне тіло на базі тонкостінного тіла

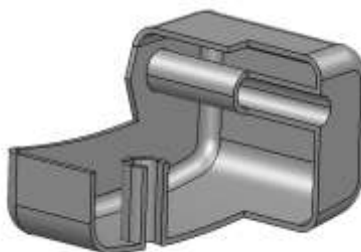


Рисунок 5.67 - Розріз тонкостінного тіла

5.11. Скруглення ребер тіла

Операція скруглення ребер тіла дозволяє побудувати плавний перехід від однієї грані до іншої. На рис. 5.68 - 5.71 наведені приклади скруглення ребер тіл, на рис. 5.68, 5.69 – скруглені опуклі ребра, а на рис. 5.70, 5.71 – скруглені увігнуті ребра.



Рисунок 5.68 - Призма зі скругленим ребром



Рисунок 5.69 - Призма зі скругленими ребрами

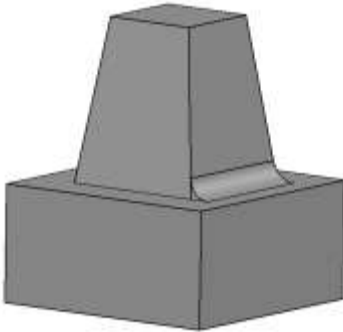


Рисунок 5.70 - Скруглення ребра

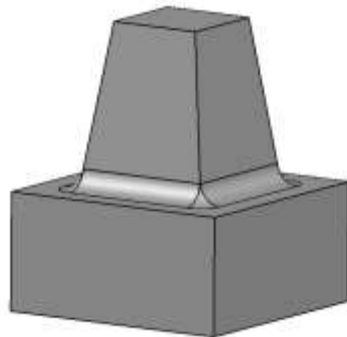


Рисунок 5.71 - Варіант скруглення ребер

Розглянемо загальний випадок скруглення довільного криволінійного ребра. Нехай грань, що лежить праворуч від ребра, яке скруглюють (якщо дивитися зовні тіла уздовж ребра), базується на поверхні $r(u, v)$, а грань, що лежить ліворуч від нього – базується на поверхні $s(a, b)$. Ці грані називатимемо таким, що *сполучаються*. Нехай ребро, яке скруглюють базується на лінії

перетині $\mathbf{c}(s)$ поверхонь $\mathbf{r}(u, v)$ і $\mathbf{s}(a, b)$. По кривій $\mathbf{c}(s)$ побудуємо поверхню скругленуя $\mathbf{q}(t, z)$, краями якої є двомірні лінії

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv}(t) &= [u(t) \ v(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{uv}(t) \in \mathbf{r}(u, v), \\ \mathbf{l}_{ab}(t) &= [a(t) \ b(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{ab}(t) \in \mathbf{s}(a, b), \end{aligned} \quad (5.45)$$

на поверхностях, які сполучаються. Побудуємо два ребра уздовж країв поверхні скруглення на базі ліній перетину

$$\mathbf{l}_{uv}(t) = [u(t) \ v(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{uv}(t) \in \mathbf{r}(u, v), \quad (5.46)$$

$$\mathbf{l}_{tz}(t) = [t \ 0]^T, \quad \mathbf{l}_{tz}(t) \in \mathbf{q}(t, z),$$

$$\mathbf{l}_{ab}(t) = [a(t) \ b(t)]^T, \quad \mathbf{l}_{ab}(t) \in \mathbf{s}(a, b), \quad (5.47)$$

$$\mathbf{l}_{tz}(t) = [t \ 1]^T, \quad \mathbf{l}_{tz}(t) \in \mathbf{q}(t, z).$$

Ці ребра називатимемо поздовжніми, оскільки вони спрямовані уздовж ребра, яке скругляють, і мають ту ж орієнтацію.

Якщо ребро, яке скругляють, є замкнутим, то поверхня скруглення також буде замкнутою за параметром t . Тоді на базі лінії перетину

$$\mathbf{l}_{tz1}(w) = [t_{\min} \ w]^T, \quad \mathbf{l}_{tz1}(w) \in \mathbf{q}(t, z), \quad (5.48)$$

$$\mathbf{l}_{tz2}(w) = [t_{\max} \ w]^T, \quad \mathbf{l}_{tz2}(w) \in \mathbf{q}(t, z),$$

побудуємо ребро, що буде швом.

Якщо ребро, яке скругляють, не замкнуте, то знайдемо всі грані (за винятком тих, що сполучаються), які перетинаються з поверхнею скруглення (більша їх частина стикується в початковій і кінцевій вершинах ребра, яке скругляють), і побудуємо лінії їх перетину з поверхнею скруглення. На базі цих ліній перетинання створимо ребра, які будемо називати поперечними.

На базі поверхні $\mathbf{q}(t, z)$ побудуємо грань скруглення. Цикл цієї грані складатиметься з поздовжніх і поперечних ребер (або шва). Для грані скруглення визначимо ознаку збігу її нормалі з напрямком нормалі поверхні. Нормаль грані скруглення повинна бути спрямована назовні тіла (нормаль поверхні скруглення може

збігатися з нею або бути протилежною до неї).

Після цього перебудуємо поверхні $r(u, v)$ і $s(a, b)$, які сполучаються, та цикли граней на них. Для цього знайдемо перетин ліній (5.46) і (5.47) з ребрами граней, які сполучаються, або їх продовженнями і змінимо ці ребра. В одних випадках згадані ребра потрібно обрізати (рис. 5.68), а в інших випадках – продовжити (рис. 5.70). Замість ребра, яке округляють, в цикл грані $r(u, v)$ поставимо ребро на базі лінії перетину (5.46), а в цикл грані $s(a, b)$ – на базі лінії перетину (5.47) (рис. 5.72).

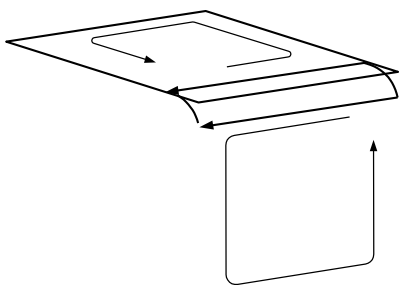


Рисунок 5.72 - Перешикування циклів граней при округленні ребра

Далі перешикуємо цикли інших граней, які перетнулися з поверхнею округлення $q(t, z)$. У цикли цих граней увійдуть поперечні ребра. Перешикування циклів здійснюють перевіркою послідовності стикування ребер між собою і складанням списку ребер циклу в порядку їх проходження. Поперечні ребра визначають область

зміни параметру t поверхні округлення $q(t, z)$.

5.11.1 Скруглення сполучених ребер

Ребра, що стикуються, називатимемо сполученими, якщо в точках стикування вони мають спільні дотичну. Якщо в точках стикування ребра зазнають злам, то такі ребра називатимемо незв'язаними.

Якщо скругляються відразу кілька незв'язаних ребер тіла, то їх скруглення виконують послідовно одне за іншим. Скруглення ребер тіл, показане на рис. 5.69, 5.70, 5.74, виконано послідовно.

У випадках скруглення декількох сполучених ребер різні стадії операції скруглення кожного ребра варто виконувати паралельно - одночасно для декількох ребер. Перед початком операції скруглення варто скласти групи ребер, які гладко

стикуються, і далі працювати з ними як з окремим ребром, як було вже зазначено. Випадок скруглення декількох сполучених ребер наведений на рис. 5.76. Початкове тіло, показане на рис 5.75, утворено скругленням двох ребер тіла, представленого на рис. 5.73.

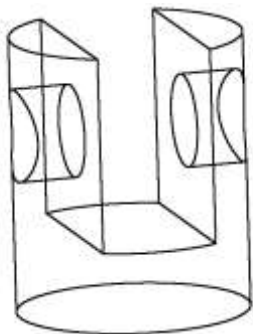


Рисунок 5.73 - Початкове тіло



Рисунок 5.74 – Тіло зі скругленням декількох ребер

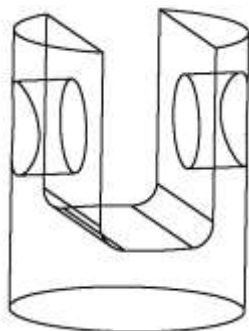


Рисунок 5.75 - Початкове тіло

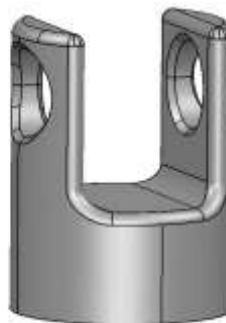


Рисунок 5.76 - Тіло зі скругленням ланцюгів ребер

Для групи сполучених ребер необхідно спочатку побудувати всі поверхні скруглення, відсікти ними ребра тіла, побудувати всі поздовжні та поперечні ребра перетину поверхонь скруглення і граней тіла, і тільки після цього побудувати грані скруглення та зробити перешикування циклів граней тіла.

На рис. 5.78 представлено тіло зі скругленням сполучених

ребер, у яких на кінцях поздовжні ребра грані скруглення сходяться в одну точку (рис. 5.77).

У даному прикладі між сполученими гранями поперечні ребра стягнуті в точку, а поверхні скруглення в них вироджуються.

Поздовжні ребра можуть не повністю лежати в області граней, що сполучаються. У цьому випадку ділянки поздовжніх ребер, що виходять за область визначення граней, що сполучаються, повинні бути замінені на ребра перетину грані скруглення і сусідніх граней, які з нею сполучаються.



Рисунок 5.77 - Початкове тіло



Рисунок 5.78 - Тіло зі скругленням ланцюгів ребер

5.11.2 Скруглення вершин

Якщо скруглити три ребра, що стикаються в одній вершині, то утвориться вершина, представлена на рис. 5.79. Скруглити вершину можна вже зазначеним способом: ребро перетину двох граней скруглення сполучено з третім ребром і може бути скруглене разом з ним.

Існує ще один спосіб скруглення вершини. Для цього побудуємо по одній лінії на кожній поверхні скруглення, використовуючи те, що кожна із трьох поверхонь скруглення перетинається із двома іншими.

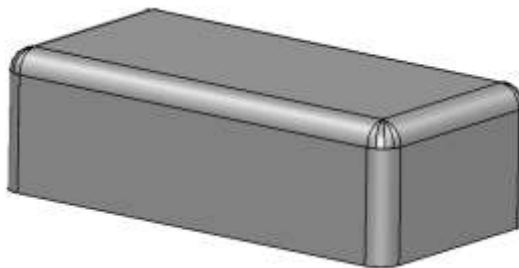


Рисунок 5.79 – Вершина, яка підлягає скругленню

Розглянемо побудову згаданої лінії на одній з поверхонь скруглення типу $\mathbf{q}(t, z)$.

Нехай поздовжня лінія $\mathbf{l}_r(t)$ цієї поверхні скруглення перетинається з поздовжньою лінією іншої поверхні скруглення в точці з параметром t_r , а поздовжня лінія $\mathbf{l}_s(t)$ розглянутої поверхні скруглення перетинається з поздовжньою лінією третьої поверхні скруглення в точці з параметром t_s . Побудуємо на розглянутій поверхні скруглення двомірний відрізок прямої із точки $[t_r \ 0]^T$ в точку $[t_s \ 1]^T$:

$$\mathbf{l}_{rz}(z) = [(1-z)t_r \ zt_s]^T, \quad \mathbf{l}_{rz}(z) \in \mathbf{q}(t, z), \quad 0 \leq z < 1. \quad (5.49)$$

За відрізком і поверхнею побудуємо просторову лінію $\mathbf{l}_q(z)$. Лінії (5.49) побудуємо на кожній із трьох поверхонь скруглення, які мають спільну точку перетину. Відріжемо і опустимо ту частину кожної грані скруглення, що лежить за побудованою лінією (5.49) (з боку спільної вершини). За трьома лініями (5.49) побудуємо поверхню, а на її базі – грань скруглення вершини.

На рис. 5.80 наведено приклад скруглення ребер і вершин призми описаним способом.

Аналогічно можна скруглити вершину, у якій стикаються чотири ребра. Для цього слід використовувати поверхню, побудовану за чотирма кривими.

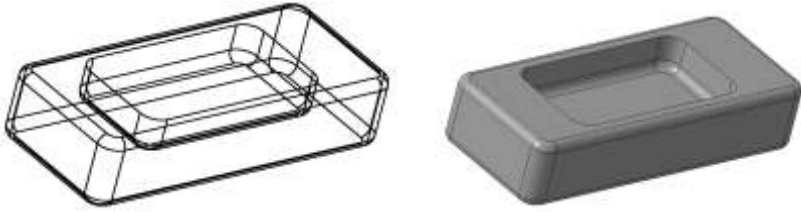


Рис. 5.80 - Скруглення ребер і вершин тіл

5.12. Побудова фасок ребер тіла

Фаски ребер тіла будують аналогічно скругленню ребер з тією лише різницею, що поверхні скруглення замінюють поверхнями фасок. Фаску описують лінійчатою поверхнею, побудованою по двом лініях на поверхнях, що перетинаються по ребру.

Результат побудови фасок ребер тіла, показаного на рис. 5.81, наведено на рис. 5.82.

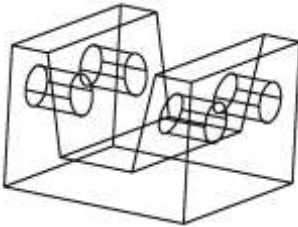


Рисунок 5.81 – Початкове тіло

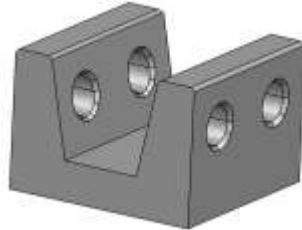


Рисунок 5.82 - Тіло з фасками ребер

Фаска вершин. Якщо поверхні фасок будують для трьох ребер, що стикаються в одній вершині, то спільну вершину, як правило, зрізують. Зрізання вершини виконаємо аналогічно скругленню вершини. Для цього знайдемо три лінії перетину поверхонь фасок і побудуємо по них трикутну поверхню. На базі трьох ліній перетину побудуємо три ребра, а на базі трикутної поверхні – грань. Результат зрізання вершини, у якій стикаються три ребра, наведено на рис. 5.83.

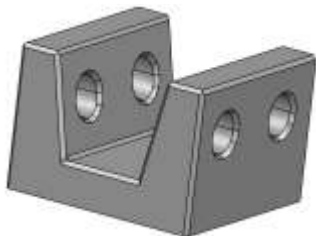


Рисунок 5.83 - Тіло з фасками ребер і вершин

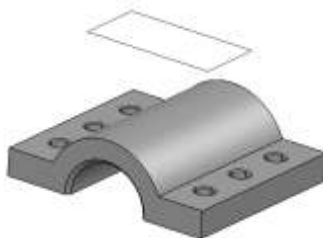


Рисунок 5.84 - Исходное тело и плоский контур

5.13. Деякі особливості побудови тіл

Описаний вище метод виконання булевих операцій застосовується у випадку повної визначеності оболонок операндів. На практиці часто потрібно виконати булеву операцію, коли оболонка одного з операндів визначена не повністю і повинна бути добудована в процесі операції. Наприклад, до заданого тіла потрібно додати частину тіла, отриманого видавлюванням заданого плоского контуру, що лежить від боку контуру (рис. 5.84). Результат такої операції представлено на рис. 5.85.

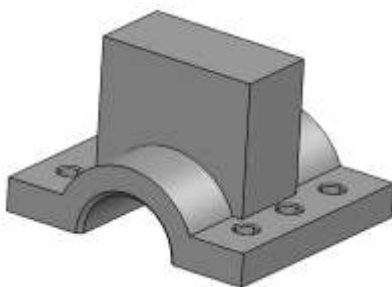


Рисунок 5.85 - видавлювання контура до найближчої поверхні тіла

У цьому випадку було потрібно «видавити» заданий контур до найближчих до нього граней заданого тіла. У різних місцях контуру найближчими можуть виявитися різні грані, тому точки контуру повинні бути «видавлені» на різні відстані.

Виконати дану операцію можна таким чином. За заданим

контуром побудуємо тіло видавлювання достатньої глибини для перетину з заданим тілом. Далі з тіла видавлювання віднімемо задане тіло. У результаті операції в загальному випадку одержимо кілька оболонок. Виберемо з них найближчу до заданого контуру.

Тіло з обраною оболонкою об'єднаємо з заданим тілом. При виконанні даних дій досить будувати ребра перетину тільки один раз. У другій частині операції (об'єднання тіла з обраною оболонкою) слід використовувати тільки ті ребра, які належать тілу з обраною оболонкою.

Іншим прикладом може бути операція «вирізання» найближчих граней заданого тіла заданим контуром (рис. 5.86).

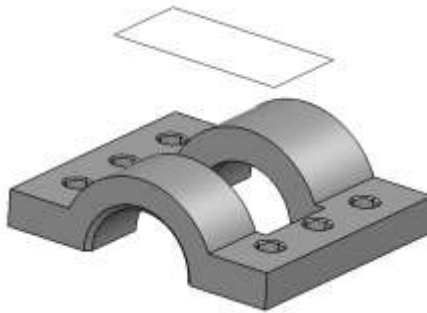


Рисунок 5.86 - Виріз контуром найближчих поверхонь тіла

У даному прикладі контуром вирізають найближчі стінки тіла і не займають грані, що лежать за ними. У різних місцях контуру його точки «видавлюються» на різні відстані.

Вирізати найближчі грані заданого тіла заданим контуром можна в такий спосіб. За заданим контуром побудуємо тіло видавлювання достатньої глибини для перетину із заданим тілом. Далі знайдемо перетин тіла видавлювання із заданим тілом. У результаті операції в загальному випадку одержимо кілька оболонок. Виберемо з них найближчу до заданого контуру. Тіло з обраною оболонкою віднімемо із заданого тіла. При виконанні даних дій досить будувати ребра перетину тільки один раз.

У багатьох конструкціях використовують ребра жорсткості. Операцію побудови ребер жорсткості виконують за тією ж схемою, що і операцію «видавлювання» контуру до найближчих до нього

граней тіла. Тіло з ребрами жорсткості представлено на рис. 5.87.



Рисунок 5.87 - Тіло з ребрами жорсткості

Коли оболонка одного з тіл-операндів повинна бути побудована в процесі виконання операції, після виконання операцій варто перевірити оболонку результуючого тіла на замкнутість.

5.14. Послідовність моделювання тіл

Моделювання деякого об'єкту може включати побудову одного або декількох тіл - складання тіл.

Створення одиночного тіла починають з побудови або одного із простих тіл, або тіла на базі ліній, або тіла на базі поверхні. Ці способи побудови тіл наведені в лівій частині рис. 5.88. Якщо початкове тіло створюють на базі плоских ліній, то для їх побудови використовують конструктивні площини. Перед побудовою тіла на базі поверхні потрібно спочатку створити початкову поверхню.

У багатьох випадках при побудові поверхні також використовують конструктивні площини. Далі шляхом виконання операцій, наведених у правій частині рис. 5.88, з початкового тіла можна одержати тіло з більш складною оболонкою. Операції над тілом можна виконувати багаторазово і у вільній послідовності, що і показано на рис 5.88.

Процес побудови оболонки складного тіла близький до процесу виготовлення об'єкта, що моделюють. За допомогою булевої операції об'єднання до тіла можна додати необхідний

об'єм. Для цього потрібно побудувати ще одне тіло і об'єднати з ним початкове тіло. Аналогічно за допомогою булевих операцій перетину або віднімання з тіла можна забрати необхідний об'єм. Від тіла може бути відрізана зайва частина об'єму. Ребра тіла можуть бути скруглені або з них можуть бути зняті фаски. З тіла можна утворити тонкостінне тіло шляхом «розкриття» однієї або декількох граней і «надання граням, що залишилися, кінцевої товщини». Для симетричних тіл можна побудувати тільки одну половину тіла, а потім одержати необхідне тіло за допомогою операції створення симетричного тіла. До тіла можуть бути додані ребра жорсткості.

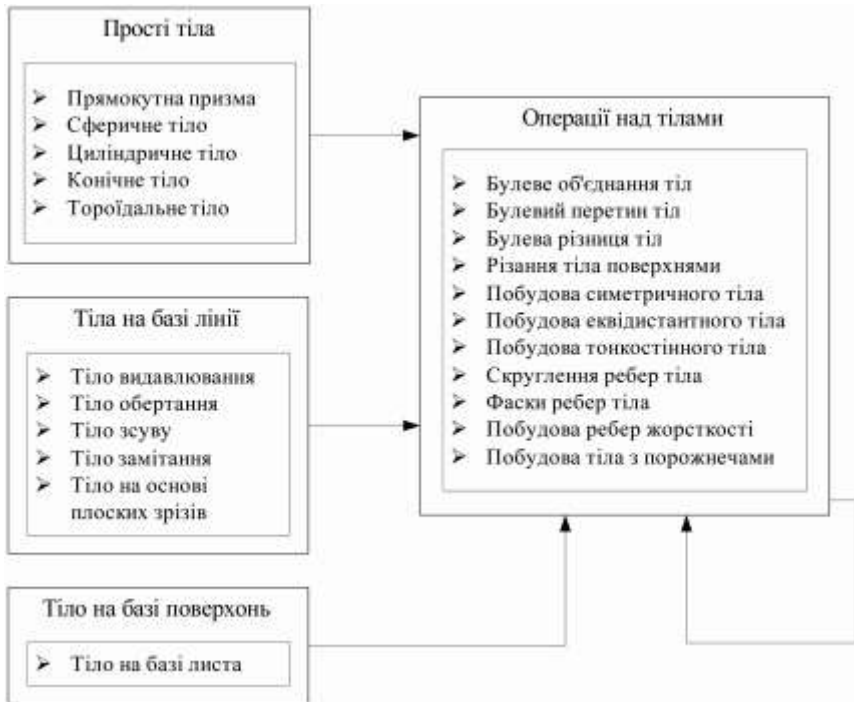


Рис. 5.88 - Способи побудови тіл

З декількох тіл можна отримати складання тіл. У складанні всі тіла рівноправні. Для взаємного розташування і орієнтації тіл складання можна використовувати перетворення зрушення,

повороту, масштабування або симетрії.

Побудова окремих тіл і складань повинна супроводжуватися протоколом побудови, який називають деревом побудови. Дерево побудови дозволяє виконувати редагування тіл і їх складань, створювати набори однотипних моделей та керувати ними.

Поряд з деревом побудови для редагування кривих ліній, поверхонь, тіл, складань тіл і керування ними можна використовувати механізм варіаційних зв'язків [1].

Питання для самостійного контролю.

1. Які є особливості математичних моделей тіл?
2. У чому виявляються особливості математичного моделювання найпростіших тіл: прямокутна призма і циліндричне, конічне, сферичне, тороїдальне тіло?
3. Який основний принцип побудови математичної моделі тіл?
4. Які є особливості побудови тіл, отриманих рухом плоского контуру?
5. Як Ви розумієте суть побудови тіла видавлювання?
6. Як Ви розумієте суть побудови тіла обертання?
7. Як Ви розумієте суть побудови кінематичного тіла?
8. Які є особливості побудови тіла за плоскими перетинами?
9. Які є особливості побудови тіла у формі листа?
10. У чому полягають особливості застосування Булевих операцій над тілами?
11. Дайте загальну характеристику різання тіла поверхнею.
12. У чому полягають особливості побудови симетричного тіла?
13. Опишіть принципи побудови еквідистантної оболонки тіла.
14. Які особливості побудови тонкостінного тіла?
15. Які особливості побудови скруглення ребер тіла?
16. Які особливості побудови скруглення фасок тіла?
17. Наведіть класифікацію способів побудови тіл.

РОЗДІЛ 6. КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА ПРИ 3D МОДЕЛЮВАННІ

6.1. Візуалізація геометричних об'єктів

Одним з найбільш яскравих застосувань геометричного моделювання є комп'ютерна графіка. Початкова інформація для одержання зображення деякого об'єкту на екрані комп'ютеру поставляється геометричною моделлю цього об'єкту. На практиці використовують різні способи візуалізації геометричних об'єктів. Найбільш простий з них - відображення лініями. Він дозволяє отримати загальну уяву об'єкту, його розмірів і форми. За допомогою комп'ютера можна одержати зображення об'єкту, що моделюють, близьке до його фотографії. Геометричній моделі або її частинам можна надати будь-який колір і освітленість. Крім того, об'єкт на екрані можна змусити рухатися у реальному часі і тим самим одержати відеофільм.

Для того, щоб побачити, як виглядить об'єкт, необхідно змоделювати поведінку потоку променів світла, що йде від джерел до моделі та від поверхні моделі до спостерігача. При цьому граням моделі можна надати необхідний колір, дзеркальність, прозорість, випромінювання, фактуру та інші фізичні властивості взаємодії зі світловими потоками. Модель можна освітлити з різних сторін світлом різного кольору та інтенсивності. Реалістичні відображення об'єктів будують з окремих точок певного кольору і яскравості, причому точки повинні бути порівняно невеликі і розташовуватися досить близько одна до одної (відстань між точками не повинна перевершувати розмірів точок).

Зображення геометричних об'єктів лініями називають *векторними*, а зображення геометричних об'єктів точками – *растровими*. Приклади векторного і растрового зображень наведено на рис. 6.1 і 6.2.

Растрова графіка більш інформативна, ніж векторна, оскільки дозволяє отримати тонові зображення, проте вимагає більше ресурсів і схильна до перекручування при редагуванні. В обох випадках ми бачимо проекції геометричних об'єктів на обрану площину.

Проекції можуть бути побудовані за допомогою ліній,

перпендикулярних до проекційної площини, або за допомогою ліній, що проходять через спільну точку. Перші називають *паралельними* проекціями (рис. 6.3), другі - *центральноними* проекціями або перспективними зображеннями (рис. 6.4). Центральні проекції можуть бути створені на площині або криволінійній поверхні. Розглянемо центральні проекції на площині.

Центральні проекції геометричних об'єктів ближче до того зображення, що виникає на сітківці ока, тому вони дають більш реалістичні картини. Хоча центральні проекції ближче до того, що можна спостерігати в реальності, розміри окремих частин об'єкту на центральних проекціях залежать від їх відстані до точки спостереження, тому в якості конструкторської документації найчастіше використовують паралельні проекції.

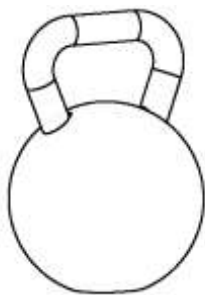


Рисунок 6.1 - Векторне зображення



Рисунок 6.2 - Растрове зображення



Рисунок 6.3 - Паралельна проекція



Рисунок 6.4 - Центральна проекція

Растрова і векторна графіка, а також паралельні і центральні проекції не є альтернативами. Вони доповнюють одна одну. У даному розділі розглянуто методи візуалізації геометричних об'єктів за допомогою комп'ютера або методи комп'ютерної

графіки.

6.2. Паралельні проекції на площину

Паралельні проекції геометричних об'єктів використовують для таких креслень, схем і інших документів, де потрібно зберегти певну геометричну точність відносних розмірів і взаємного розташування окремих частин об'єктів.

Нехай потрібно побудувати паралельну проекцію геометричних об'єктів на площину, яку визначають точкою \mathbf{q} і двома взаємно ортогональними векторами одиничної довжини \mathbf{i}_x і \mathbf{i}_y . Проекційна площина може бути пов'язана з кресленням, екраном комп'ютеру або будь-яким іншим пристроєм виводу. Систему координат, у якій описані відображувані об'єкти, називатимемо *глобальною системою координат*. Зв'яжемо із проекційною площиною *місцеву систему координат* Q_{xyz} . Нехай початкову точку \mathbf{q} місцевої системи координат у глобальній системі координат описують радіус-вектором $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$, а орти \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , $\mathbf{i}_z = \pm \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y$ місцевої системи координат у глобальній системі координат – векторами $\mathbf{i}_x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $\mathbf{i}_y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$, $\mathbf{i}_z = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$. Місцева система координат може бути як правою ($\mathbf{i}_z = \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y$), так і лівою ($\mathbf{i}_z = -\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y$). На рис. 6.5 наведено приклад побудови місцевої системи координат і паралельних проекцій ребер прямого паралелепіпеду на площині, яку визначають за радіус-вектором точки \mathbf{q} і ортами \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z . На рис. 6.6 наведено паралельні проекції ребер прямого паралелепіпеду на площині.

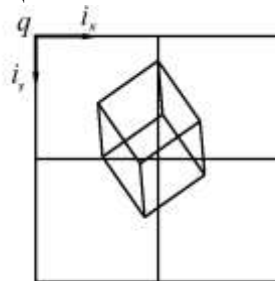
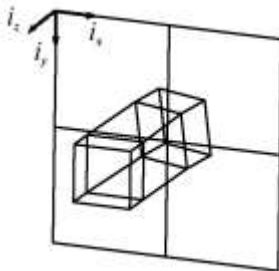


Рисунок 6.5 - Проекційна площина

Рисунок 6.6 - Проекція об'єкту

6.2.1. Проекція точки

Розглянемо довільну точку $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$. Визначимо двовірну точку $\mathbf{p} = [x \ y]^T$, яка є її проекцією на проекційній площині

$$p(x, y) = q + x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y. \quad (6.1)$$

Паралельну проекцію довільної точки \mathbf{r} відображуваних об'єктів одержимо, опустивши від неї перпендикуляр на проекційну площину. Нехай точка $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$ у місцевій системі координат має координати x , y , z . Координати зв'язані співвідношеннями (1.14), які в цьому випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} x &= x_1(r_1 - q_1) + x_2(r_2 - q_2) + x_3(r_3 - q_3) = x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3 + o_x, \\ y &= y_1(r_1 - q_1) + y_2(r_2 - q_2) + y_3(r_3 - q_3) = y_1r_1 + y_2r_2 + y_3r_3 + o_y, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$z = z_1(r_1 - q_1) + z_2(r_2 - q_2) + z_3(r_3 - q_3) = z_1r_1 + z_2r_2 + z_3r_3 + o_z,$$

де

$$o_x = -x_1q_1 - x_2q_2 - x_3q_3,$$

$$o_y = -y_1q_1 - y_2q_2 - y_3q_3,$$

$$o_z = -z_1q_1 - z_2q_2 - z_3q_3.$$

В однорідних координатах перетворення (6.2) описують рівнянням

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & o_x \\ y_1 & y_2 & y_3 & o_y \\ z_1 & z_2 & z_3 & o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_0 \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Коефіцієнти розширеної матриці перетворення виражають через компоненти векторів, що визначають положення проекційної площини.

Проекцію точки на площину (6.1) описують першими двома координатами вектору (6.3). Таким чином, перші дві координати розширеного радіус-вектору, визначеного за формулою (6.3), є координатами паралельної проекції $\mathbf{r} = [x \ y]^T$ розглянутої точки, яку шукали.

6.2.2. Масштаб проєкції

За допомогою перетворення (6.3) може бути отримана проєкція точок ліній у масштабі 1:1, якщо одиниця виміру довжини для пристрою виводу дорівнює одиниці виміру простору, у якому побудована геометрична модель. Вивід на екран комп'ютеру здійснюється в екранних одиницях - пікселях. Нехай при побудові геометричної моделі використовувалася одиниця довжини - міліметр. Якщо розмір пікселя не дорівнює міліметру, то для одержання на екрані зображення геометричного об'єкту в масштабі 1:1 радіус-вектор кожної точки проєкції варто помножити на масштабну одиницю пристрою виводу, рівну кількості пікселів в одному міліметрі. Масштабна одиниця може бути різною для координати x і координати y . В останньому випадку радіус-вектор $\mathbf{r} = [x \ y]^T$ точки проєкції необхідно помножити на матрицю

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Якщо потрібно одержати зображення об'єкту в масштабі $m : 1$, то радіус-вектор двовірної точки проєкції слід перетворити. Тоді, координати x' і y' проєкції деякої точки \mathbf{r} геометричного об'єкту з урахуванням масштабу дорівнюють

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + m \cdot \left(\begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + m \cdot \left(\begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & o_x \\ y_1 & y_2 & y_3 & o_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right), \quad (6.5) \end{aligned}$$

де x_0 і y_0 - координати точки, яка при масштабуванні повинна залишитися нерухливою.

Замість матриці \mathbf{A}_0 у (6.5) використовують матрицю, яка має її перші два рядки.

Бачимо, що для одержання координат x' і y' плоскої проєкції деякої точки $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$ досить знати положення проєкційної

площини в просторі (орти площини проєкції $\mathbf{i}_x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $\mathbf{i}_y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$, $\mathbf{i}_z = \pm \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y$, положення центру площини $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$), масштабні одиниці m_x і m_y , пристрою виводу та масштаб відображення m .

6.3. Центральні проєкції на площину

У паралельній проєкції на площину кожному точці геометричного об'єкту проєктують на задану площину уздовж того самого напрямку незалежно від положення точки в просторі. Якщо розміри об'єкту порівняні з відстанню до об'єкту, то паралельна проєкція об'єкту відрізняться від його фотозображення. Вид також буде відрізняться і від фотографії об'єкту. Це відбувається тому, що зображення на сітківці ока і на фотографії отримано не за допомогою паралельної проєкції. Реальне зображення близько до *центральної проєкції* об'єкту на площину. Центральні проєкції називають також *перспективними зображеннями*. При графічному відображенні геометричної моделі центральні проєкції дають більш реалістичну картину, ніж паралельні проєкції. Центральна проєкція є виконаною за певними правилами проєкцією моделі об'єкту на площину. Вона також як і паралельна проєкція є плоским об'єктом, який будують за допомогою двомірних ліній.

Нехай потрібно побудувати центральну проєкцію геометричних об'єктів на площину, яка визначається точкою \mathbf{q} і двома взаємно ортогональними векторами одиничної довжини \mathbf{i}_x і \mathbf{i}_y . Зв'яжемо із проєкційною площиною *місцеву систему координат* Q_{xyz} . Нехай початкову точку \mathbf{q} місцевої системи координат у глобальній системі координат описують радіус-вектором $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$, а орти \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , $\mathbf{i}_z = \pm \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y$ місцевої системи координат у глобальній системі координат – векторами $\mathbf{i}_x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $\mathbf{i}_y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$, $\mathbf{i}_z = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$.

Для побудови центральної проєкції на площину потрібно знати ще точку простору, з якої ведуть спостереження. Цю точку називатимемо *точкою спостереження* (точка спостереження для паралельної проєкції знаходиться в нескінченності в позитивному напрямку нормалі до проєкційної площини). Нехай точкою спостереження є точка W . Проєкцію точки W на проєкційну площину позначимо через F .

На рис. 6.7 показано місцеву систему координат, точку спостереження і центральні проєкції ребер прямого паралелепіпеду, а на рис. 6.8 – центральні проєкції ребер прямого паралелепіпеду на площині.

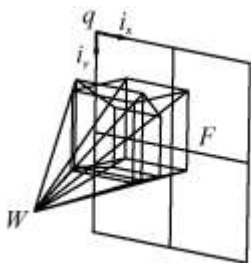


Рисунок 6.7 - Побудова центральної проєкції

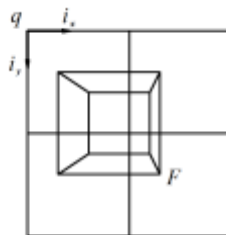


Рисунок 6.8 - Центральна проєкція об'єкту

Якщо провести площину через точку спостереження, паралельну площині проєкції, то об'єкт, який спроектується, повинен повністю лежати в тій же частині простору, що й площина проєкції.

6.3.1. Проекція точки

Розглянемо побудову центральної проєкції однієї з вершин прямого паралелепіпеду на площину (6.1). На рис. 6.9 представлено точку, яка позначена через R , а її центральна проєкція – через P . Центральну проєкцію довільної точки R будують таким чином. Побудуємо пряму лінію, що проходить через точку спостереження W і точку R , яку проєктують. Точка P , у якій ця пряма або її продовження перетинають проєкційну площину, і є центральною проєкцією точки R .

Радіус-вектор точки R позначимо через \mathbf{r} , а радіус-вектор її центральної проєкції – через \mathbf{p} . Нехай точку, яку проєктують, в глобальній прямокутній декартовій системі координат описують радіус-вектором з координатами $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$, а в системі координат Q_{xyz} , що пов'язана із проєкційною площиною, ця точка має координати x, y, z . Координати точки \mathbf{r} у цих координатних системах зв'язані співвідношенням (6.3).

Позначимо радіус-вектор точки спостереження через \mathbf{w} . Нехай у місцевій системі координат він має координати x_w, y_w, z_w . Відстань від точки спостереження W до її проєкції на площину F дорівнює z_w . Побудуємо відрізок RA , паралельний відрізку PF . Довжина відрізка WA дорівнює $z_w - z$.

Розглянемо на рис. 6.9 два подібних трикутники: WFP і WAR . З подоби трикутників витікає, що $PW/FW = RW/AW$. Запишемо останнє рівняння у векторному вигляді:

$$\frac{\mathbf{p} - \mathbf{w}}{z_w} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{w}}{z_w - z}. \quad (6.6)$$

Використовуючи це рівняння, знайдемо радіус-вектор \mathbf{p} центральної проєкції точки \mathbf{r}

$$\mathbf{p} = \mathbf{w} + (\mathbf{r} - \mathbf{w}) \frac{z_w}{z_w - z} = \mathbf{r} \frac{z_w}{z_w - z} - \mathbf{w} \frac{z}{z_w - z}. \quad (6.7)$$

Щоб одержати координати точки \mathbf{p} у проєкційній площині, потрібно за допомогою рівняння (6.3) перевести вектор \mathbf{r} із глобальної системи координат у місцеву. Перші дві координати вектору \mathbf{p} у проєкційній системі координат і будуть координатами центральної проєкції точки \mathbf{r} на площині (6.1). Запишемо рівняння (6.7) у місцевій системі координат:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \frac{z_w}{z_w - z} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{z}{z_w - z} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (xz_w - zx_w)/(z_w - z) \\ (yz_w - zy_w)/(z_w - z) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Таким чином, декартові координати двомірної точки $\mathbf{p} = [x_p y_p]^T$, що є центральною проєкцією розглянутої точки \mathbf{r} у просторі, на площині (6.1) дорівнюють

$$x_p = \frac{xz_w - zx_w}{z_w - z}, \quad y_p = \frac{yz_w - zy_w}{z_w - z}. \quad (6.9)$$

Якщо віддалити точку спостереження на нескінченну відстань від проєкційної площини, то $z_w \rightarrow \infty$ і $x_p \rightarrow x$, $y_p \rightarrow y$.

У розширеному матричному вигляді з урахуванням (6.3)

рівняння (6.8) можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_p d \\ y_p d \\ z_p d \\ d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_w & 0 & -x_w & 0 \\ 0 & z_w & -y_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & z_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} z_w & 0 & -x_w & 0 \\ 0 & z_w & -y_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & z_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & o_x \\ y_1 & y_2 & y_3 & o_y \\ z_1 & z_2 & z_3 & o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Нагадаємо, що просторові координати вектору дорівнюють першим трьом компонентам розширеного вектору, поділивши на його четверту компоненту. Враховуючи припущення, що проєкційна площина і розглянута точка розташовані з одного боку від точки спостереження, величина $d = z_w - z$ завжди позитивна. Формула (6.10) описує перетворення координат із глобальної системи у двомірну систему на проєкційній площині. Це є штучним перетворенням, оскільки третю координату центральної проєкції за ним не визначають (прийнята рівною нулю). Воно не має зворотного перетворення, оскільки визначник однієї з матриць дорівнює нулю.

6.3.2. Матриця перетворення

Центральну проєкцію об'єкту можна отримати за допомогою його перетворення за матрицею

$$\mathbf{A}_w = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & q_x \\ x_2 & y_2 & z_2 & q_y \\ x_3 & y_3 & z_3 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_w & 0 & -x_w & 0 \\ 0 & z_w & -y_w & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & z_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & o_x \\ y_1 & y_2 & y_3 & o_y \\ z_1 & z_2 & z_3 & o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Після такого перетворення об'єкт спотвориться так, що його паралельна проєкція на площину (6.1) збігатиметься з його центральною проєкцією на цю ж площину. Визначник матриці \mathbf{A}_w

не дорівнює нулю, і перетворення (6.11) оборотне.

Для того, щоб урахувати масштабні одиниці пристрою виводу та масштаб проєкції, двомірний радіус-вектор $\mathbf{p} = [x_p \ y_p]^T$ потрібно помножити на матрицю (6.4) і масштаб зображення.

На рис. 6.10 і 6.11 представлено перспективні зображення геометричного об'єкту.

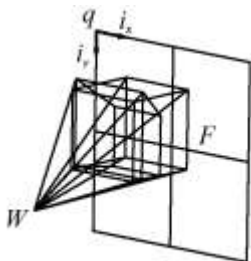


Рисунок 6.10 - Центральна проєкція об'єкту

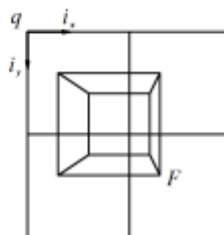


Рисунок 6.11 - Центральна проєкція об'єкту

Для обох рисунків використовували ту саму проєкційну площину, але на рис. 6.10 проєкція точки спостереження лежить ліворуч і вище центрів рисунка, а на рис. 6.11 – праворуч від центру рисунка. Чим далі від точки спостереження перебуває об'єкт, тим менше його перспективне зображення.

6.4. Полігони кривих і поверхонь

Проєкція на площину просторового відрізка є відрізком на площині, а паралельна проєкція на площину просторової ламаної лінії є ламаною лінією на площині. Для того, щоб одержати зображення кривої лінії, використовуватимемо *проєкцію полігону кривої*.

Для кожної кривої лінії побудуємо набір точок \mathbf{p}_k , які належать кривій і слідуєть у порядку зростання параметру. З'єднавши ці точки відрізками, одержимо ламану лінію, що апроксимує задану криву. Набір точок для побудови ламаної, яка апроксимує, називатимемо *полігоном* кривої. Точки полігону обчислюватимемо досить близько одну від одної, щоб лінії зображення здавалися плавними.

6.4.1. Визначення кроку кривої

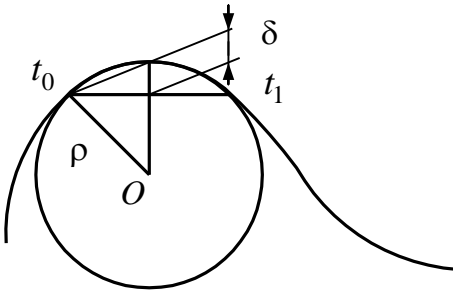


Рисунок 6.12 - Обчислення кроку за параметром кривої для заданого прогину δ

Розглянемо обчислення кроку апроксимації кривої лінії. Нехай задана крива $\mathbf{r}(t)$ і нехай ми перебуваємо у деякій її точці t_0 , яка є точкою полігону. Потрібно знайти параметр t_1 наступної точки полігону, так щоб відхилення кривої від її полігону не перевищувало задану величину δ . Припустимо, що в найближчому оточенні крива близька до свого дотичного у цій точці кола (рис. 6.12).

Радіус ρ дотичного кола дорівнює радіусу кривизни кривої і визначається за формулою

$$\rho = \frac{|r'|^3}{|r' \times r''|}. \quad (6.12)$$

За теоремою Піфагора квадрат половини довжини хорди дорівнює $\rho^2 - (\rho - \delta)^2 = \delta(2\rho - \delta)$. Тоді довжина всієї хорди дорівнюватиме

$$h = 2\sqrt{\delta(2\rho - \delta)}. \quad (6.13)$$

Якщо крива близька до дуги дотичного кола і кут дуги досить малий, то можна вважати, що довжина хорди приблизно дорівнює довжині дуги кривої і збільшення параметру Δt на довжині дуги кривої можна прийняти рівним

$$\Delta t \approx \frac{h}{|r'|} = 2\frac{\sqrt{\delta(2\rho - \delta)}}{|r'|}. \quad (6.14)$$

Таким чином, параметр наступної точки полігону може бути

прийнятий рівним $t_1 = t_0 + \Delta t$. При різкій зміні напрямку або довжини другої похідної в точці t_1 у порівнянні з попередньою точкою формула (6.14) дає помилку, тобто прогин може виявитися значно більше δ . У цьому випадку крок слід уточнити шляхом визначення середнього радіусу кривизни кривої на розглянутій ділянці.

Формула обчислення параметричного кроку між точками полігону (6.14) дозволяє побудувати полігон кривої, який відстоїть від самої кривої на величину, що не перевищує δ . Проекція цього полігону буде відстояти від проекції кривої також на величину, що не перевищує δ , при масштабі відображення 1:1 ($m = 1$). Величину δ називатимемо *точністю відображення*. Для довільного масштабу відображення $m : 1$ проекція полігону кривої відстоятиме від проекції кривої на величину, що не перевищує $m\delta$. Таким чином, якщо необхідно одержати проекцію кривої в масштабі $m : 1$ з точністю відображення δ , то слід побудувати полігон, точки якого перебувають на параметричній відстані, яка не перевищує

$$\Delta t \approx 2 \frac{\sqrt{(\delta/m)(2\rho - \delta/m)}}{|\mathbf{r}'|}. \quad (6.15)$$

Крок (6.15) визначається точністю відображення і залежить від розмірів кривої та масштабу відображення.

6.4.2. Визначення кроку кривої на поверхні

Крок для полігону кривої лінії на поверхні обчислимо аналогічно обчисленню кроку полігону. Нехай точку деякого полігону поверхні $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ визначають параметрами u_0 і v_0 . Знайдемо параметри u_1 і v_1 наступної точки поверхні так, щоб просторовий відрізок із точки $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ в точку $\mathbf{r}(u_1, v_1)$ відстояв від поверхні на відстань, яка не перевищує заданої величини δ . Для цього обчислимо радіус кривизни лінії на поверхні, що має напрямок $du : dv$. Радіус кривизни лінії на поверхні визначають виразом

$$\rho = \frac{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2}{b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2}. \quad (6.16)$$

Підставивши (6.16) у (6.15), одержимо збільшення для параметрів сусідньої точки полігону

$$\Delta u \approx 2 \frac{\sqrt{(\delta/m)(2\rho - \delta/m)}}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 (dv/du)|}, \quad \Delta v \approx 2 \frac{\sqrt{(\delta/m)(2\rho - \delta/m)}}{|\mathbf{r}_1 (dv/du) + \mathbf{r}_2|}, \quad (6.17)$$

де $\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}/du$ і $\mathbf{r}_2 = d\mathbf{r}/dv$; m - масштаб відображення.

В окремих випадках для u -полігонів одержимо $\rho_u = g_{11} / b_{11}$, а для v -полігонів – $\rho_v = g_{22} / b_{22}$. Відповідно ненульові кроки уздовж координатних u -ліній і v -ліній поверхні дорівнюють

$$\Delta u \approx 2 \frac{\sqrt{(\delta/m)[2(g_{11}/b_{11}) - \delta/m]}}{|d\mathbf{r}/du|}, \quad \Delta v = 0, \quad (6.18)$$

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v \approx 2 \frac{\sqrt{(\delta/m)[2(g_{22}/b_{22}) - \delta/m]}}{|d\mathbf{r}/dv|}, \quad (6.19)$$

де g_{11} , g_{12} , g_{21} , g_{22} , b_{11} , b_{12} , b_{21} , b_{22} - коефіцієнти перших і другий основних квадратичних форм поверхні [1].

Значення кроків обчислюють приблизно. Це роблять з метою зменшення обчислювальних витрат. При необхідності кроки можуть уточнювати.

Величину прогину δ вибирають досить малою, щоб не було помітно зламів проекції в точках полігонів. Вона становить частки міліметру. Відстань між точками полігону залежить від кривизни лінії і може бути досить великою.

6.4.3. Сітки полігонів

За допомогою полігонів можна відобразити криві лінії, поверхні або тіла. Для зручності полігони, які належать одному геометричному об'єкту, об'єднують у сітки. Сітка є сукупністю полігонів для векторного відображення деякого геометричного

об'єкту. Так, сітка кривої складається з одного полігона. Сітка поверхні складається з полігонів її меж і декількох полігонів її u -ліній і v -ліній. Сітка тіла складається з полігонів поверхонь його граней. Відображення геометричних об'єктів полігонами є

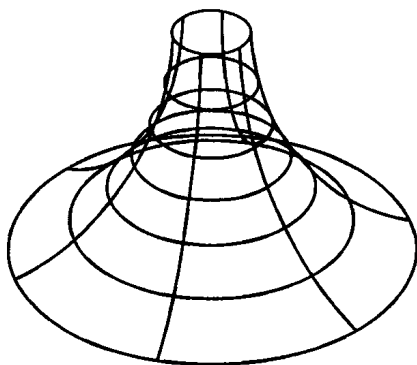


Рис. 6.13 - Проекції сітки полігонів поверхні

універсальним і простим. Для одержання паралельної проекції полігону досить обчислити проекції його точок і з'єднати їх відрізками. На рис. 6.13 наведено приклад відображення сітки поверхні, побудованої за координатними u -лініями і v -лініями.

У деяких випадках для векторного відображення поверхні або тіла межових і координатних ліній недостатньо. Для більшої інформативності відображення кривих поверхонь і граней до проекцій координатних ліній додають проекції *ліній нарису*.

6.5. Лінії нарису

Кожна поверхня одним зі своїх боків може бути спрямована до спостерігача і тоді цей бік буде видимим. У протилежному випадку бік поверхні не буде видно із точки спостереження. Може статися так, що тільки частина боку поверхні буде видимою. У цьому випадку на поверхні можна побудувати лінію, яка розділятиме видиму і невидиму частини поверхні. *Лінією нарису* називатимемо лінію на поверхні, яка відокремлює видиму частину поверхні або грані від невидимої її частини.

На рис. 6.14 показано лінії нарису поверхні, а на рис. 6.15 – лінії нарису разом із сіткою поверхні.

При переході через лінію нарису нормаль поверхні міняє напрямок відносно лінії погляду. У точках лінії нарису нормаль поверхні ортогональна лінії погляду. У загальному випадку у

поверхні може бути декілька ліній нарису. Кожна лінія нарису є просторовою кривою. Вона або замкнута, або кінчається на краях поверхні. Для різних напрямків погляду існує своя сукупність ліній нарису, тому при повороті поверхні лінії нарису необхідно будувати заново.

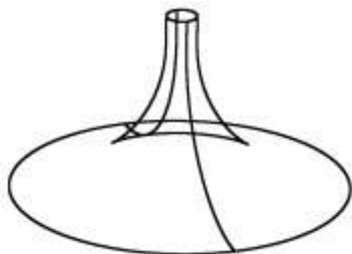


Рисунок 6.14 - Проекції ліній нарису поверхні

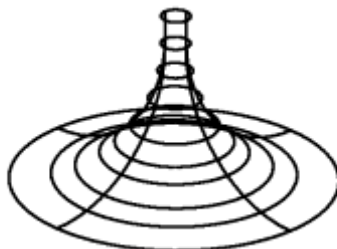


Рисунок 6.15 - Проекції сітки полігонів та ліній нарису

6.5.1. Паралельні проекції

Для деяких поверхонь, наприклад, сфери, циліндру, конусу, лінії нарису будують досить просто. Розглянемо загальний випадок побудови ліній нарису поверхні.

Нехай потрібно знайти лінії нарису поверхні, яку описують радіус-вектором $\mathbf{r}(u, v)$. Кожна точка лінії нарису для паралельної проекції на площину (6.1) повинна задовольняти рівнянню

$$\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{m} = 0, \quad (6.20)$$

де $\mathbf{m} = \mathbf{m}(u, v)$ - нормаль до поверхні, для якої будують лінію нарису.

Для поверхні, яку описують радіус-вектором $\mathbf{r}(u, v)$, нормаль $\mathbf{m}(u, v)$ також є функцією параметрів u і v . Скалярне рівняння (6.20) має два параметри u, v , які шукають. Якщо задати один з параметрів, то інший можна знайти з рівняння (6.20), тобто один з параметрів є функцією від іншого. Для рівноправності параметрів їх можна представити у вигляді функцій деякого загального параметру t :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t). \quad (6.21)$$

Результатом рішення рівняння (6.20) є двомірна лінія

$$l_{uv}(t) = [\mathbf{u}(t) \ \mathbf{v}(t)]^T, \quad l_{uv}(t) \in r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (6.22)$$

на поверхні $r(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Ця лінія і є лінією нарису поверхні.

Побудуємо лінію нарису за впорядкованою сукупністю точок, які задовольняють рівнянню (6.20). Точками назвемо пари параметрів u_i і v_i поверхні, що є координатами двомірних точок на параметричній площині. Маючи окремі точки лінії нарису, розташовані в порядку їх проходження та на певній відстані одна від одної, завжди можна знайти будь-яку іншу точку лінії. Наприклад, для знаходження точки, що лежить між двома заданими сусідніми точками лінії нарису, проведемо площину перпендикулярно відрізку, який з'єднує сусідні точки, і знайдемо спільну точку для поверхні та площини вирішенням трьох скалярних рівнянь перетину разом з рівнянням (6.20). Положення площини на відрізку можна задати параметром лінії. За крайніми точками відрізку визначають нульове наближення для точки, яку знаходять. Таким чином, сукупність окремих двомірних точок лінії нарису поверхні служить як би нульовим наближенням цієї лінії, за яким одним із чисельних методів завжди можна знайти точне положення точки. Алгоритм побудови ліній нарису поверхні можна розбити на два етапи.

На першому етапі знайдемо хоча б по одній точці на кожній лінії нарису. Для цього, крокуючи по поверхні та досліджуючи знак скалярного добутку $\mathbf{m} \cdot \mathbf{i}_z$ у сусідніх точках, знайдемо пари точок поверхні, у яких $\mathbf{m} \cdot \mathbf{i}_z$ міняє знак. Взявши в якості нульового наближення середні значення параметрів цих точок, одним із чисельних методів знайдемо параметри u, v точки лінії нарису. Нехай, наприклад, при переході із точки $[u_1 \ v_1]^T$ у близьку до неї точку $[u_2 \ v_2]^T$ $\mathbf{m} \cdot \mathbf{i}_z$ міняє знак. Тоді, прийнявши $u^{(0)} = (u_1 + u_2)/2$, $v^{(0)} = (v_1 + v_2)/2$, за допомогою ітераційного процесу методу Ньютонa

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)}, \quad \mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)} - \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{i}_z}{\mathbf{i}_z \cdot (\partial \mathbf{m} / \partial v)} \right)^{(k)} \quad (6.23)$$

або ітераційного процесу

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{i}_z}{\mathbf{i}_z \cdot (\partial \mathbf{m} / \partial u)} \right)^{(k)}, \quad v^{(k+1)} = v^{(k)} \quad (6.24)$$

знайдемо параметри однієї із точок лінії нарису.

Похідні нормалі \mathbf{m}_1 і \mathbf{m}_2 визначають формулами Вейнгартена [1]. Таким чином одержимо набір точок ліній нарису. Точки з отриманого на першому етапі набору ніяк не зв'язані одна з одною і можуть належати різним лініям нарису. Важливо тільки, щоб від кожної лінії нарису в наборі була присутня хоча б одна точка.

На другому етапі беремо будь-яку точку з наявного набору та, рухаючись від неї з деяким кроком спочатку в один бік, а потім в інший, знаходимо точку за точкою сукупність точок лінії нарису. Напрямок руху дає вектор

$$\mathbf{t} = \pm \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}}{|\mathbf{r}_1|} \pm \frac{\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}}{|\mathbf{r}_2|}, \quad (6.25)$$

де \mathbf{m}_1 і \mathbf{m}_2 – частинні похідні нормалі $\mathbf{m}(u, v)$, \mathbf{r}_1 і \mathbf{r}_2 – частинні похідні радіус-вектору $\mathbf{r}(u, v)$ поверхні за параметрами u і v .

Знак перед доданком $(\mathbf{m}_i \times \mathbf{m})/|\mathbf{r}_i|$, $i = 1, 2$ співпадає зі знаком скалярного добутку $\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{i}_z$. Крок руху обчислимо відповідно до кривизн поверхонь у поточній точці за формулою (6.18) або (6.19).

Якщо $\frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} > \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|}$, то за формулою (6.18) маємо збільшення

параметру u і за формулою (6.23) знайдемо відповідний йому параметр v поверхні. У протилежному випадку за формулою (6.19) маємо збільшення параметру v і за формулою (6.24) знайдемо відповідний йому параметр u поверхні. Рух по кривій закінчимо, коли дійдемо до краю однієї з поверхонь або коли лінія замкнеться (нова точка виявиться на відстані поточного кроку від точки старту).

У процесі руху перевірятимемо, чи не лежать поблизу шляхи проходження точки з набору, одержаного на першому етапі. Для цього за шляхом проходження обчислюватимемо відстань від поточної точки кривої нарису до кожної точки з набору,

одержаного на першому етапі. Якщо обчислена відстань до будь-якої точки набору порівняна з поточним кроком руху, то цю точку видалимо з набору як непотрібну. Так одержимо сукупність окремих точок $[u_i \ v_i]^T$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ однієї лінії нарису. При цьому в наборі точок, одержаному на першому етапі, не буде жодної точки даної лінії. Якщо в наборі залишаться ще точки, то дана поверхня має, принаймні, ще одну лінію нарису. Сукупність її точок знайдемо, взявши будь-яку точку з набору та повторивши другий етап побудови. Побудову ліній закінчимо, коли в наборі не залишиться жодної точки. За описаним способом побудуємо лінії нарису всіх граней моделі.

Лінії нарису граней є лініями нарису їх поверхонь. Лінія нарису тіла буде видимою, якщо вона не закрита гранню, що лежить ближче до точки спостереження. На рис. 6.16 наведено лінію нарису тіла обертання, показано на рис. 6.17. Проекція лінії нарису може мати злами і точки повернення, але сама лінія нарису є гладкою. Точки зламу в проекції виникають там, де дотична лінія нарису колінеарна вектору \mathbf{i}_z .



Рисунок 6.16 - Лінії нарису тіла



Рисунок 6.17 - Тіло обертання

Для побудови проекції лінії нарису будуватимемо її полігон, проекцію якого і візьмемо в якості проекції лінії нарису.

6.5.2. Центральні проекції

Лінії нарису у центральних проекціях задовольняють рівнянню

$$\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{w}) = 0, \quad (6.26)$$

де $\mathbf{m} = \mathbf{m}(u, v)$ - нормаль поверхні; $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$; \mathbf{w} - радіус-вектор точки спостереження.

Лінія нарису для центральної проєкції відрізняється від лінії нарису для паралельної проєкції, хоча алгоритми їх побудови аналогічні. Замість постійного вектору \mathbf{i}_z у (6.26) присутній вектор $\mathbf{r} - \mathbf{w}$, напрямком якого залежить від точки, яку проєкують. Лінія нарису для центральної проєкції також є деякою кривою на поверхні, яка описана залежностями (6.22), і є просторовою кривою. Ця лінія повинна бути спроектована на площину за правилами побудови центральної проєкції просторової лінії.

На рис. 6.18 наведено паралельну проєкцію ліній нарису тору, а на рис. 6.19 для порівняння – центральну проєкцію ліній нарису тору. Як видно, ці проєкції відрізняються.



Рисунок 6.18 - Паралельна проєкція ліній нарису тору

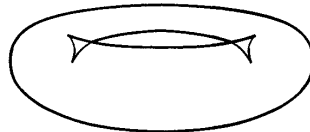


Рисунок 6.19 - Центральна проєкція ліній нарису тору

Алгоритм побудови ліній нарису для центральної проєкції поверхні, яка описана радіус-вектором $\mathbf{r}(u, v)$, відрізняється від алгоритму побудови ліній нарису для паралельної проєкції цієї поверхні тим, що на першому етапі шукають точки поверхні, у яких міняє знак скалярний добуток $\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{w})$. Для визначення цих точок замість формул (6.23) і (6.24) варто використовувати формули

$$u^{(k+1)} = u^{(k)}, \quad v^{(k+1)} = v^{(k)} - \left(\frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{w})}{(\partial \mathbf{m} / \partial v) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{w}) + \mathbf{m} \cdot (\partial \mathbf{r} / \partial v)} \right)^{(k)} \quad (6.27)$$

і формули

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \left(\frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{w})}{(\partial \mathbf{m} / \partial u) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{w}) + \mathbf{m} \cdot (\partial \mathbf{r} / \partial u)} \right)^{(k)}, \quad v^{(k+1)} = v^{(k)} \quad (6.28)$$

відповідно. Іншим алгоритм побудови ліній нарису для центральної проекції поверхні не відрізняється від алгоритму побудови ліній нарису для паралельної проекції.

6.6. Визначення видимої частини геометричних об'єктів

6.6.1. Векторна графіка

При побудові векторних зображень визначення видимої частини геометричних об'єктів зводиться до задачі видалення невидимих ліній. Сітки полігонів будують для всіх поверхонь тіл. Частина полігонів може виявитися закритою від погляду

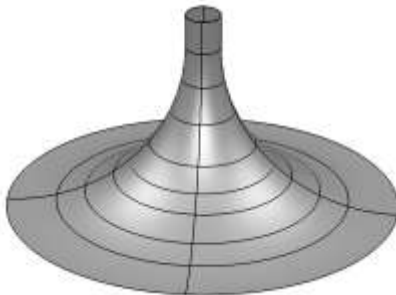


Рисунок 6.20 - Проекція поверхні з видаленням невидимих ліній

спостерігача. При видаленні невидимих ліній векторні проекції отримують більш реалістичний вигляд. На рис. 6.20 наведено проекцію поверхні, показаної на рис. 6.13, без невидимих ліній.

Лінія нарису буде видимою, якщо вона не закрита іншою гранню або частиною своєї ж грані.

Розглянемо один з алгоритмів видалення невидимих ліній. Спочатку побудуємо просторові полігони геометричного об'єкту, включаючи полігони ліній нарису. Сукупність просторових ліній $c_i(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, які відповідають всім полігонам об'єкту, називатимемо *каркасною моделлю*. Далі побудуємо проекцію (паралельну або центральну) каркасної моделі на задану площину. Ця проекція буде складатися із двовірних ліній $c_i(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Кожній просторовій кривій $c_i(t_i)$ відповідає двовірна крива $c_i(t_i)$. Кожній точці $\mathbf{r} = c_i(t)$ просторової кривої відповідає точка $\mathbf{r} = c_i(t)$ двовірної кривої. Серед ліній проекції виділимо ті, які є проекціями ліній нарису,

ребер тіл і меж поверхонь. Позначимо їх через $l_j(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Визначимо, які частини проекції каркасної моделі є видимими, а які ні. Для цього знайдемо всі точки перетину та самоперетину двовірних кривих $l_j(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$ між собою і з усіма кривими $c_i(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ та розріжемо цими точками лінії на частини. Відповідним чином розріжемо просторові лінії. Залишається позначити і видалити невидимі частини проекції. Тепер кожна частина лінії буде або повністю видима, або повністю невидима.

Розглянемо алгоритм визначення видимості ліній проекції. Побудуємо контур на площині проекції, який охоплює всі двовірні криві. Всі лінії контуру будуть видимими. Для визначення видимості інших ліній візьмемо довільну точку \mathbf{r} на двовірній кривій. Знайдемо відповідну їй точку \mathbf{r} на відповідній просторовій лінії. Побудуємо пряму лінію $l(t) = \mathbf{r} + t\mathbf{i}$, яка проходить через точку \mathbf{r} і точку спостереження та спрямовану від точки спостереження.

Для паралельної проекції вектор $\mathbf{i} = -\mathbf{i}_z$, для центральної проекції вектор $\mathbf{i} = (\mathbf{r} - \mathbf{w}) / |\mathbf{r} - \mathbf{w}|$. Знайдемо всі точки перетину цієї прямої з поверхнями геометричного об'єкту. Якщо значення параметру t прямої для всіх точок перетину позитивні, то крива є видимою. Якщо серед значень параметру t для точок перетину знайдеться хоча б одне негативне, то крива є невидимою, оскільки її закриває одна з поверхонь моделі, яка перебуває ближче до спостерігача, ніж точка \mathbf{r} . Здійснено цю процедуру з усіма двовірними кривими і видалимо ті частини проекції, які виявляться невидимими.

Для полігонів тіл розглянутий алгоритм видалення невидимих ліній проекції можна спростити. Проекція полігону (або його частини) грані тіла буде невидима, якщо нормаль грані в точках відповідного тривимірного полігону спрямована від точки спостереження. Проекції ребер тіла, нормалі обох суміжних граней яких спрямовані від точки спостереження, також є невидимими.

На рис. 6.21 наведено зображення деталі з лініями нарису і вилученими невидимими лініями. На рис. 6.22 наведено зображення деталі, де невидимі лінії мають меншу товщину, ніж видимі.

Описаний алгоритм є універсальним, але вимагає більших витрат часу. Для геометричних об'єктів, описуваних плоскими

гранями, існує ряд швидких алгоритмів видалення невидимих ліній. В алгоритмі Галімберти та Монтанари [1] кожне ребро геометричного об'єкту зіставляється із площиною кожної грані об'єкту. Кожна площина грані ділить весь простір на два півпростори. Якщо при зіставленні ребро завжди розташовується в одному півпросторі з точкою спостереження або лежить на площині, частиною якого є грань, то ребро видиме. Якщо для якоїсь площини ребро розташовується не в тому півпросторі, де лежить точка спостереження, то варто перевірити, чи не закрите ребро гранню, на якій побудована площина. Для цього досить перевірити положення проекції ребра щодо проекції контуру грані і визначити, чи розташовується перша повністю поза другою, повністю усередині другої або частково усередині другої. Якщо при зіставленні ребра і площини деякої грані ребро попадає до обох півпросторів, то його ділять на дві частини і кожную частину розглядають окремо описаним способом. Після кожної перевірки від розглянутого ребра залишають тільки видиму частину.

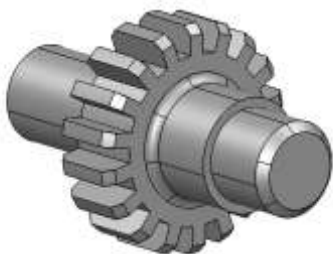


Рисунок 6.21 - Проекція деталі з видаленням невидимих ліній

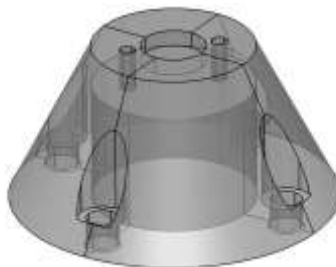


Рисунок 6.22 - Проекція деталі зі стонченням невидимих ліній

6.6.2. Растрова графіка

Растрове зображення формують з окремих точок. При побудові растрових зображень виникає необхідність визначати видиму частину геометричних об'єктів. Уоткінс [1] запропонував алгоритм побудови видимої частини зображення, що має подібність з порядковим розгорненням зображення. Об'єкт, який проєціюють, перетинають паралельними площинами, ортогональними площині проєкції. Ці площини називають

площинами розгорнення. Кожна площина перетинає геометричний об'єкт по деяких плоских кривих. Положення цих кривих аналізують на предмет віддаленості від спостерігача. На проекції повинні бути побудовані тільки найближчі до спостерігача лінії або їх частини. Таким чином, на лінії розгорнення досить відобразити частини відрізків, видимі із точки спостереження. Зображення формують з рядків розгорнення. Алгоритм Уоткінса застосуємо для побудови паралельних проекцій растрової графіки.

Поверхні граней тіл перетинаються тільки по своїх краях. Якщо визначити положення граней однієї відносно другої і їх віддаленість від точки спостереження, то для одержання правильного зображення досить вивести на екран грані в порядку їх віддалення від точки спостереження. Першими варто вивести найбільш віддалені грані. Цей метод застосуємо, якщо є можливість змінювати зображення в процесі його побудови. Якщо грані, виведені пізніше, проектуються на грані, виведені раніше, то наступні грані будуть або закривати собою попередні (якщо грані непрозорі), або їх колір можна комбінувати з уже існуючим кольором (якщо грані частково прозорі). Цей алгоритм був запропонований Ньюелом і Санча [1]. Основні труднощі алгоритму полягають у визначенні порядку розташування граней.

При формуванні растрових зображень потрібно не тільки визначити видиму частину геометричних об'єктів, але ще колір і яскравість кожної точки зображення. Якщо геометричні об'єкти не прозорі, то колір точки залежить від кольору найближчої до спостерігача грані в цій точці, а яскравість – від освітленості об'єкту, оптичних властивостей його поверхні та від орієнтації нормалі поверхні відносно променів світла, що падає, і до лінії візування, що з'єднує розглянуту точку і точку спостереження. Якщо геометричні об'єкти прозорі, то колір точок зображення залежить від кольору всіх граней, які перетинає лінія візування, їх оптичних властивостей і від орієнтації їх нормалей. Розглянемо геометричні аспекти даної задачі.

У загальному випадку для кожної точки растрового зображення слід побудувати лінію, що проходить через точку спостереження для центральної проекції, або лінію, перпендикулярну площині проекції для паралельної проекції, і знайти всі точки перетину цієї лінії з відображуваними об'єктами.

У точках перетину буде потрібно обчислити нормаль до поверхні об'єкту для того, щоб визначити яскравість точки растрового зображення. На рис. 6.23 наведено растрове зображення деталі, побудоване даним способом.



Рисунок 6.23 - Растрове зображення з визначенням яскравості видимих точок

Для криволінійних поверхонь перераховані дії вимагають більших обчислювальних витрат. Якщо поверхні геометричних об'єктів плоскі, то задача істотно спрощується. Для зменшення часу формування растрового зображення всі поверхні об'єктів, які відображають, апроксимують *трикутними пластинами*.

6.7. Триангуляція поверхонь і тіл

Триангуляція – це апроксимація поверхні об'єкту, який моделюють, трикутними пластинами, які відстоять від неї на відстані, що не перевищує деякої заданої величини δ . Всі трикутні пластини повинні стикуватися між собою. Їх вершини лежать на поверхні. З набором трикутних пластин легше працювати, ніж з поверхнею загального виду. Трикутні пластини називатимемо *трикутниками*. Для трикутника досить швидко обчислюють відстань до заданої точки або точку перетину із заданою прямою у просторі. Триангуляцію граней виконують для візуального сприйняття геометричної моделі, тому боки трикутників обирають такими, щоб око не могло помітити злами.

При відображенні геометричних об'єктів по трикутниках на параметричних площинах поверхонь повинна бути побудована

просторова триангуляція граней тіла шляхом обчислення масиву точок у просторі $\mathbf{p}_i(u_i, v_i)$ і масиву нормалей $\mathbf{m}_i(u_i, v_i)$ до граней тіла в цих точках за масивами двомірних точок $\mathbf{p}_i = [u_i, v_i]^T$. Для швидкого відображення тіл їх грані апроксимують трикутними пластинами, побудованими на точках \mathbf{p}_i . Нормалі потрібні для визначення поведінки світлових променів, які взаємодіють з гранями тіла. Тонові рисунки в попередніх розділах і у даному розділі виконані з використанням триангуляції.

За результатом триангуляції поверхні бажано мати масив двомірних точок $\mathbf{p}_i = [u_i, v_i]^T$ на параметричній площині і масив трійок цілих чисел, які є номерами точок у першому згаданому масиві. Таким чином, кожний трикутник буде представлений трьома номерами його вершин у масиві параметрів. По кожній двомірній точці параметричної області можуть бути обчислені просторова точка $\mathbf{p}_i(u_i, v_i)$ на поверхні та нормаль $\mathbf{m}_i(u_i, v_i)$ поверхні в ній. Просторові точки і нормалі можуть зберігатися у масивах, аналогічних масиву двомірних точок.

Зупинимося на деяких способах триангуляції. Для плоских поверхонь існують економічні методи триангуляції, у яких трикутники будують на межних точках поверхні і не потрібно шукати точки усередині параметричної області.

6.7.1. Триангуляція Делоне

Розглянемо деяку область на площині. Область називатимемо *опуклою*, якщо при русі уздовж її межі доводиться повертати тільки в одну сторону (тільки вліво або тільки вправо). Для триангуляції опуклих плоских областей можна використовувати алгоритм Делоне. Ми не зможемо прямо застосувати цей алгоритм для триангуляції поверхонь довільної форми, проте ми будемо використовувати його метод побудови трикутників.

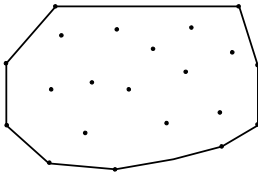


Рисунок 6.24 - Опукла область з заданими точками усередині

Нехай надані деяка опукла двомірна область, обмежена замкнутою ламаною лінією, і набір точок усередині цієї області (рис. 6.24).

Потрібно розбити зазначену область на трикутники, вершинами

яких є задані точки усередині області і вершини ламаної лінії, що її обмежує. Трикутники не повинні накривати один одного, а їх боки можуть перетинатися тільки у вершинах.

Можна побудувати кілька різних наборів трикутників, що заповнюють зазначену область. У всіх випадках число трикутників дорівнює $K + I - 2$, де K - число вершин ламаної, що обмежує, I - число заданих точок усередині області. *Триангуляція області буде триангуляцією Делоне, якщо усередині описаного навколо кожного трикутника кола відсутні вершини інших трикутників.* Триангуляція Делоне будує трикутники близькі до рівнокутного (не допускає побудову не виправдано витягнутих трикутників). Її можна назвати збалансованою. Триангуляція Делоне буде унікальною, якщо ніякі чотири вершини не лежать на одному колі.

Розглянемо триангуляцію Делоне. Вершини ламаної, яка обмежує область, і задані точки усередині області називатимемо *вершинами триангуляції*. Боки трикутників називатимемо *ребрами*. Серед ребер виділимо відрізки ламаної, що обмежує, які називатимемо *межними ребрами*. Зорієнтуємо всі межні ребра так, щоб опукла область лежала ліворуч від кожного ребра. Нехай потрібно побудувати трикутник, боком якого є межне ребро AB , показане на рис. 6.25.

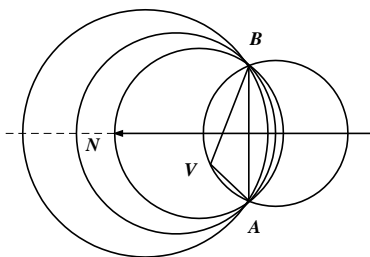


Рисунок 6.25 - Вибір третьої точки алгоритму Делоне

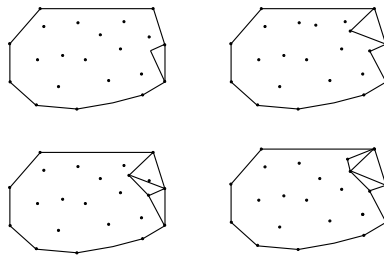


Рисунок 6.26 - Процес триангуляції Делоне

Через вершини A , B і будь-яку вершину, яка не лежить з ними на одній прямій, можна провести коло. В якості третьої вершини трикутника виберемо вершину V , відповідне коло якої, не містить інших вершин з того ж боку відносно відрізка AB , з якого лежить точка V . Для межного ребра у загальному випадку можна

знайти одну таку вершину. Називатимемо її *найближчою*. Центр кола, що проходить через точки A , B і V , лежить на перетині перпендикулярів до середин відрізків AB , BV і VA . Положення центру кола характеризуватимемо параметром t відрізка MN , який перпендикулярний ребру AB , рівний з ним по довжині та проходить через середину ребра AB .

Процес триангуляції показано на рис. 6.26.

Для всіх вершин, що лежать ліворуч від відрізка AB , найближча вершина має найменший параметр t . Відповідне найближчій вершині коло не містить інших вершин ліворуч від відрізка AB . Нехай вершини A , B і V описують двомірними радіус-векторами $\mathbf{a} = [x_a \ y_a]^T$, $\mathbf{b} = [x_b \ y_b]^T$, $\mathbf{v} = [x_v \ y_v]^T$ відповідно. Радіус-вектори середин відрізків AB і BV дорівнюватимуть

$$\mathbf{m} = [x_m \ y_m]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_a + x_b) \\ \frac{1}{2}(y_a + y_b) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = [x_q \ y_q]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_v + x_b) \\ \frac{1}{2}(y_v + y_b) \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Значення параметру t прямої $MN = (1-t)\mathbf{m} + t\mathbf{n}$, що відповідає положенню на ній центра кола, яке проходить через точки A , B і V , дорівнює

$$t = \frac{(x_v - x_b)(x_q - x_m) + (y_v - y_b)(y_q - y_m)}{(y_v - y_b)(x_b - x_a) - (x_v - x_b)(y_b - y_a)}. \quad (6.30)$$

Для найближчої ліворуч до відрізка AB вершини параметр t має мінімальне значення.

Зорієнтуємо всі межні ребра так, щоб область, яка підлягає триангуляції, лежала ліворуч від кожного з них. Побудову трикутників почнемо з будь-якого межного ребра. Знайдемо для нього найближчу вершину, відповідне коло якої не має інших вершин. Нехай для межного ребра AB знайдена найближча вершина V . Тоді побудуємо трикутник ABV і переведемо ребро AB у розряд неактивних. *Неактивними* називатимемо ребра і вершини, які не беруть участь в алгоритмі триангуляції. Якщо серед межних ребер відсутнє ребро BV , то на відріжку VB побудуємо нове межне ребро. Якщо ж серед межних ребер є ребро BV , то переведемо його

та вершину B у розряд неактивних. Якщо серед межних ребер відсутнє ребро VA , то на відріжку AV побудуємо нове межне ребро. Якщо ж серед межних ребер є ребро VA , то переведемо його і вершину A у розряд неактивних.

Триангуляцію закінчимо, коли всі вершини і ребра стануть неактивними. Результат триангуляції заданої області наведено на рис. 6.27.

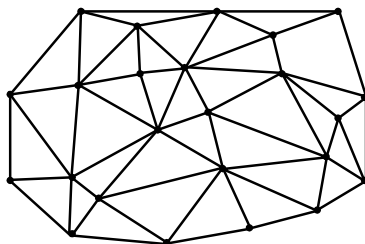


Рисунок 6.27 - Триангуляція
Делоне

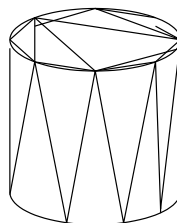


Рисунок 6.28 - Узгодженність
межних полігонів граней тіла

6.7.2. Інші методи триангуляції

Триангуляцію методами корекції і поглинання досить докладно розглянуто в [1]. Існують і інші способи триангуляції. Наприклад, після побудови полігонів зовнішнього та внутрішнього контурів області визначення поверхні може бути обрана інша стратегія побудови трикутників. В іншому варіанті можна перед початком триангуляції об'єднати зовнішній і внутрішній полігони в один. Можна усередині області визначення параметрів за певним алгоритмом «накидати» точки і за ними і точками полігонів межних контурів виконати триангуляцію Делоне. Існують алгоритми, за якими будують спочатку великі трикутники, а потім ділять їх до прийнятних розмірів.

6.7.3. Триангуляція тіла

Триангуляція тіла є сукупністю трикутників, утворених шляхом триангуляції поверхонь його граней. Триангуляція окремих поверхонь відрізняється від триангуляції граней тіла тим, що в

останньому випадку повинні бути погоджені межні полігони для суміжних граней (рис. 6.28). Ділянки полігонів суміжних граней, що проходять по загальних ребрах, будуть погодженими, якщо їх точки збігаються в просторі.

6.7.4. Застосування триангуляції

Побудовані в результаті триангуляції трикутники використовують для одержання тонових зображень. На рис. 6.29 і 6.30 наведено приклади триангуляції грані листового тіла.



Рисунок 6.29 - Триангуляція грані тіла методом корекції



Рисунок 6.30 - Триангуляція грані тіла методом поглинання

6.8. Моделювання світла

Зображення навколишніх нас предметів формується на сітківці ока потоками світла, що прийшли від цих предметів. Світло, яке прийшло, є відбитим або випроміненим поверхнями навколишніх предметів. Якщо деяке тіло повністю поглинає світло, що на нього падає, то його називають абсолютно чорним. Якщо тіло повністю пропускає світло, що на нього падає, то його називають абсолютно прозорим. Реальні предмети деяку частину світла, що падає, поглинають, перетворюючи його у тепло, деяку частину світла пропускають і деяку частину - відбивають. Вважатимемо, що для об'єктів, які моделюють, частка випроміненого і поглиненого світла незначна у порівнянні з частками пропущеного і відбитого світла.

Поглинена частина, пропущена частина і відбита частина світла, що падає, залежать від довжини його хвилі. Колір предмету залежить і від довжини хвилі світла, що падає, і від областей спектру, які поверхня предмету відбиває більшою мірою. У цьому параграфі ми не будемо зупинятися на кольорі тіл, а розглянемо

взаємодію тіл з потоком світла хвилі деякої довжини. Світловий потік характеризуватимемо інтенсивністю світла – щільністю потоку енергії світлової хвилі.

Тонове зображення залежить від положення точки спостереження, положення джерел світла відносно геометричної моделі та від оптичних властивостей її поверхонь. Поверхня об'єкту частково поглинає світло, що падає, частково - пропускає, а частково - відбиває. При моделюванні відбитого світла його умовно ділять на дві частини: *дифузійно відбите* і *дзеркально відбите*. Цей розподіл пов'язаний із законами, за якими описують напрямки променів відбитого світла. Відповідно поверхням приписують властивості дифузійного і дзеркального відбиття. Якщо більшу частину відбитого поверхнею світла можна описати законом дифузійного відбиття, то поверхню називають *матовою*, якщо ж більшу частину відбитого поверхнею світла можна описати законом дзеркального відбиття, то її називають *дзеркальною*. Об'єкти, поверхні яких здатні пропускати більшу частину світла, що падає вглиб, називають прозорими. Пропущене через поверхню світло також умовно ділять на дві частини: *дифузійно пропущене* і *спрямовано пропущене*. Спрямовано пропущене світло зазнає переломлення. Пропущене світло може бути відбито від інших поверхонь.

Світло, що падає на поверхню, можна умовно розділити на *спрямоване* і *розсіяне*. Спрямованим є світло сонця або деякого іншого точкового джерела. Розсіяне світло виникає в результаті дифракції деякого спрямованого світла на дрібних оптичних неоднорідностях навколишнього середовища (наприклад, повітря) через флуктуацію щільності (невеликих відхилень щільності від її середнього значення в межах малих об'ємів). Розсіяне світло характеризують рівномірним розподілом його інтенсивності в усіх напрямках. Під час відсутності розсіяного світла предмети виглядають контрастними. Так виглядають предмети, поміщені в темну кімнату і освітлені спрямованим на них прожектором. При відсутності повітря частини предметів, що перебувають у тіні, можуть бути зовсім не видимими. У більшості реальних ситуацій присутнє розсіяне світло.

Світло, яке приходить у точку спостереження, розділимо на чотири складові частини:

- розсіяне світло;
- дифузійно відбите світло;
- дзеркально відбите світло;
- пропущене світло.

6.8.1. Розсіяне світло

Розсіяне світло, як і спрямоване, схильне до дифузійного та дзеркального відбиття, але у зв'язку з однаковою інтенсивністю у всіх напрямках у точку спостереження від кожної точки поверхні приходить однакова кількість розсіяного світла. Позначимо через I_a інтенсивність розсіяного світла. При наявності тільки розсіяного світла у точку спостереження від кожної точки об'єкту незалежно від орієнтації в ній поверхні прийде світло інтенсивності

$$I = k_a I_a, \quad (6.31)$$

де k_a - коефіцієнт, який визначає відбиту частку розсіяного світла.

6.8.2. Дифузійно відбите світло

Матова поверхня більшу частину світла, яке падає, відбиває дифузійно. Для дифузійного відбиття справедливий закон косинусів Ламберта, що встановлює відповідність між кількістю відбитого світла і косинусом кута θ між напрямком інтенсивності I_p на точкове джерело світла і нормаллю до поверхні. Інтенсивність дифузійно відбитого світла визначають формулою

$$I_d = k_d I_p \cos \theta, \quad (6.32)$$

де k_d - коефіцієнт дифузійного відбиття, який залежить від матеріалу поверхні.

Кількість дифузійно відбитого світла не залежить від положення спостерігача. Матові поверхні відбивають однакову кількість світлової енергії у всіх напрямках, але ця кількість пропорційна $\cos \theta$.

6.8.3. Дзеркально відбите світло

Дзеркальні поверхні відбивають світло неоднаково у різних напрямках. Внаслідок цього на гладких криволінійних поверхнях

можна спостерігати світловий відблиск. Від дзеркальної поверхні більша частина світла, що падає, відбивається у певному напрямку: кут з нормаллю якого дорівнює куту, що падає і лежить в одній площині зі світлом, що падає, і нормаллю в точці падіння. Цей напрямок називають напрямком відбитого світла (рис. 6.31).

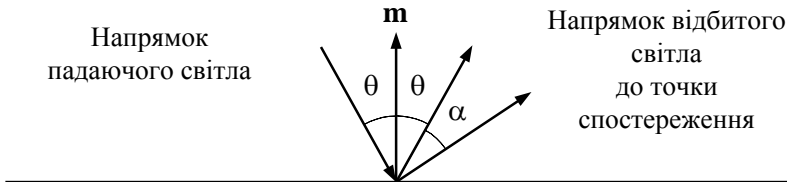


Рисунок 6.31 - Дзеркальне відбиття світла

При відхиленні на деякий кут α від цього напрямку інтенсивність відбитого світла різко зменшується. Зміну інтенсивності дзеркально відбитого світла біля напрямку відбитого світла Фонг запропонував описувати функцією $\cos^n \alpha$, де n може залежати від властивостей поверхні і лежить у діапазоні від 1 до 200.

Кількість відбитого світла залежить також і від кута падіння θ . При моделюванні світла залежність відбитого світла від кута падіння заміняють константою $f(\theta) = k_s$, яку вибирають дослідженням шляхом так, щоб результати були прийнятні з естетичної точки зору. Якщо інтенсивність джерела світла дорівнює I_p , то інтенсивність дзеркально відбитого світла визначають формулою Фонга

$$I_s = k_s I_p \cos^n \alpha, \quad (6.33)$$

де k_s називатимемо коефіцієнтом дзеркального відбиття; n - коефіцієнт блиску.

Чим більше n , тим яскравіше світловий відблиск.

6.8.4. Пропущене світло

Якщо об'єкт, що відображається, є прозорим, то від точки його поверхні в точку спостереження прийде не тільки відбите світло, але й світло, пропущене поверхнею із глибини об'єкту.

Пропущене поверхнею світло може прийти у результаті відбиття від іншої поверхні або від джерела світла через прозорий об'єкт. В обох випадках світло піде через речовину і буде їм частково поглинено. Інтенсивність світла при проходженні через речовину зменшується за експонентним законом і описується законом Бугера

$$I = I_0 e^{-\mu l}, \quad (6.34)$$

де I_0 - інтенсивність світла на вході в поглинаючу речовину; l - пройдена відстань; μ - коефіцієнт поглинання світла даною речовиною.

При $l = 1 / \mu$ інтенсивність пропущеного світла зменшується в e разів. Цю рівність можна розглядати, як визначення коефіцієнту поглинання. Інтенсивність I_0 є однією зі складових частин світла, що падає. Поверхню як межу двох середовищ характеризують коефіцієнтом відбиття $k = k_s + k_d$ і коефіцієнтом пропускання k_t . Якщо зневажити поглинанням світла, то інтенсивність відбитого і пропущеного світла в сумі повинні давати інтенсивність світла, що падає

$$I_p = I_d + I_s + I_t = k_d I_p + k_s I_p + k_t I_p. \quad (6.35)$$

Як було зазначено вище, пропущене світло умовно ділять на дифузійно пропущене та спрямовано пропущене. Для простоти вважатимемо, що частка дифузійно пропущеного світла мала у порівнянні з частками спрямованого пропущеного світла, і залишимо поза розглядом дифузійно пропущене світло. Спрямоване пропущене світло зазнає заломлення на поверхні розділу двох середовищ. Заломлений промінь лежить в одній площині з променем, що падає, і нормаллю в точці падіння (рис. 6.32).

Його напрямок утворює кут θ' з нормаллю і описується законом заломлення

$$n_0 \sin \theta' = n' \sin \theta, \quad (6.36)$$

де n_0 - показник заломлення середовища з боку світла, що падає; n' - показник заломлення середовища з іншого боку поверхні розділу.

Для інтенсивності спрямовано пропущеного світла приймемо закон зміни від напрямку аналогічний закону (6.34) для

спрямованого відбитого світла

$$I_t = k_t I_p \cos^n \beta, \quad (6.37)$$

де β - кут відхилення напрямку пропущеного світла від напрямку в точку спостереження.

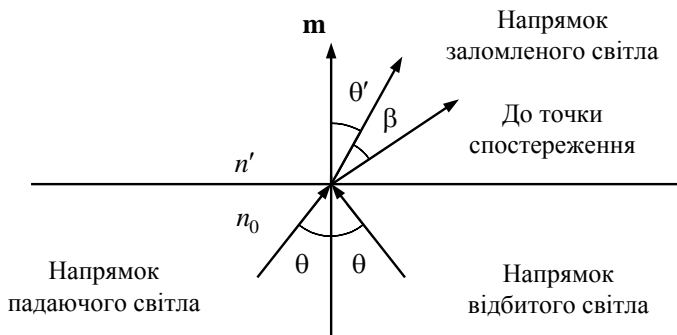


Рисунок 6.32 - Заломлення світла

Пропущене світло, яке прийшло до спостерігача, проходить парне число меж середовищ і зазнає стільки ж раз заломлення.

6.8.5. Інтенсивність спостережуваного світла

Реальні поверхні мають властивості і дифузійного, і дзеркального відбиття, а також можуть бути частково прозорими. У реальних ситуаціях присутні і спрямоване, і розсіяне світло. Розглянемо обчислення інтенсивності світла, що прийшло в точку спостереження від непрозорої поверхні. Її визначають сумою трьох складових

$$I = k_a I_a + I_p k_d \cos \theta + I_p k_s \cos^n \alpha. \quad (6.38)$$

Результати зафарбування, отримані за допомогою формули (6.38), мають велику реалістичність, але і істотний недолік. Якщо дві плоскі поверхні одного кольору паралельні і їх проекції перекриваються, то поверхні будуть зафарбовані однаково і їх зображення зіллються незалежно від їх відстані до точки спостереження. Для усунення цього ефекту інтенсивність світла, що прийшло від поверхні, вважатимемо залежною від відстані і

запишемо формулу обчислення інтенсивності світла у вигляді

$$I = \frac{k_a I_a}{1 + k_r (r - r_0)} + I_p (k_d \cos \theta + k_s \cos^n \alpha), \quad (6.39)$$

де r - відстань від точки спостереження до точки поверхні; r_0 - відстань від точки спостереження до найближчої точки об'єкту; k_r - коефіцієнт впливу віддаленності точки об'єкту на інтенсивність світла, що прийшло від неї.

При $k_r = 0$ одержимо формулу (6.38). Інтенсивність світла від найближчої точки також буде збігатися з (6.38). Відстань r_0 введено через те, що для паралельних проєкцій точка спостереження перебуває на нескінченності. Для центральних проєкцій можна прийняти $r_0 = 0$, тоді при віддаленні всього об'єкту від точки спостереження буде спостерігатися зменшення його яскравості.

Формулу (6.39) варто розглядати як емпіричну формулу, прийнятну з естетичної точки зору і досить просту. У деяких випадках замість цієї формули використовують формулу

$$I = k_a I_a + I_p \frac{k_d \cos \theta + k_s \cos^n \alpha}{1 + k_r (r - r_0)}. \quad (6.40)$$

Вона також дозволяє одержувати досить реалістичні зображення.

Розглянемо обчислення інтенсивності світла, що прийшло в точку спостереження від прозорого об'єкту, показано на рис. 6.33.

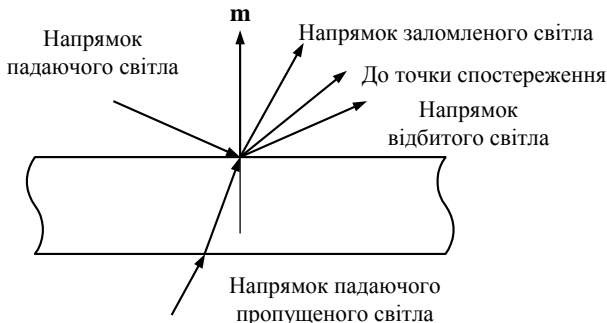


Рисунок 6.33 - Розрахункова схема обчислення інтенсивності світла

Для побудови реалістичних зображень інтенсивність світла, що прийшло від деякої точки об'єкту, опишемо формулою

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{k_a I_a}{1 + k_r (r - r_0)} + I_p (k_d \cos \theta + k_s \cos^n \alpha) + I_p k_t \cos^n \beta = \\
 &= \frac{k_a I_a}{1 + k_r (r - r_0)} + I_p (k_d \cos \theta + k_s \cos^n \alpha) + I_0 k_t^2 e^{-\mu l} \cos^n \beta.
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

Останній доданок отримано таким чином. Після проходження променем світла інтенсивності I_0 першої поверхні інтенсивність пропущеного світла дорівнює $k_t I_0$, при досягненні другої поверхні його інтенсивність дорівнюватиме $I_p = k_t I_0 e^{-\mu l}$, нарешті, після проходження другої поверхні інтенсивність стане рівною $k_t^2 I_0 e^{-\mu l}$. Світло інтенсивності I_0 може прийти від іншого джерела або може бути спрямовано відбитою частиною світла інтенсивності I_p , але відбитою від деякої іншої поверхні.

За наявності декількох джерел світла кожне з них дає свій внесок в інтенсивність світла, що прийшло у точку спостереження. Для декількох джерел світла, з інтенсивністю кожного I_{p_i} , формула (6.39) прийме вигляд

$$I = \frac{k_a I_a}{1 + k_r (r - r_0)} + \sum_i I_{p_i} (k_d \cos \theta_i + k_s \cos^n \alpha_i). \tag{6.42}$$

Аналогічним чином зміниться формула (6.41) обчислення інтенсивності світла, що прийшло від прозорої поверхні. Вона прийме вигляд

$$I = \frac{k_a I_a}{1 + k_r (r - r_0)} + \sum_i I_{p_i} (k_d \cos \theta_i + k_s \cos^n \alpha_i) + \sum_j I_{p_j} k_t \cos^n \beta_j, \tag{6.43}$$

де I_{p_j} - інтенсивність j -го пропущеного променя світла (що проникає з іншого боку поверхні).

Торренс і Сперроу [1] створили теоретично обґрунтовану модель поверхні, що відбиває світло. У цій моделі передбачено, що поверхня є сукупністю мікроскопічних площин, що відбивають ідеально. Орієнтацію граней задають функцією розподілу ймовірностей Гаусса. Властивості мікроскопічних площин і їх орієнтація відносно напрямку світла, що падає, визначають

розподіл інтенсивності відбитого світла за різними напрямками. Модель Торренса і Сперроу добре узгоджується з дослідями, але є складнішою за модель, розглянуту вище.

6.9. Опис кольору

Світло і його сприйняття людиною – це складні явища, які досі вивчені не в повній мірі. З експериментальних досліджень відомо, що світло з довжиною хвилі з певної частини спектру сприймається оком у вигляді світла певного кольору. Колір залежить від джерела світла, від властивостей поверхні об'єкту та від зорової системи людини. Так, якщо об'єкт освітлено червоним світлом, а його поверхня відбиває тільки синє світло, то об'єкт здаватиметься чорним.

Наприклад, якщо яскравість круглих областей усередині двох квадратів однакова, то коло на світлому тлі здається більше темним, ніж таке ж коло на темному тлі. Це явище називають *одночасним контрастом*. Подібне явище існує і при сприйнятті кольорових зображень. Залежно від кольору і яскравості оточення кольорові області можуть мати різний відтінок (здаватися такими, що змінюють колір). Крім того, межі областей постійної інтенсивності здаються яскравішими, ніж центральна частина областей. Це явище називають *ефектом смуг Маха*.

Щоб одержати кольорові зображення світло представляють у вигляді трьох компонентів. Це представлення засновано на фізіологічній *трьохкомпонентній теорії кольору*, відповідно якій в сітківці ока є три типи колбочок та пік чутливості кожного із цих типів припадає або на червоний, або на зелений, або на синій кольори. Чутливість ока не однакова до різних кольорів: найбільша вона для зеленого кольору, найменша - для синього. Крім того, око сприймає не абсолютне значення інтенсивності того або іншого кольору, а її відносне значення. Отже, лінійний розподіл рівнів інтенсивності світла, що приходить, в зоровій системі людини стає логарифмічним. Все сказане показує, що в результаті моделювання іноді можна одержати не ту колірну гаму, яка очікувалася.

Інтенсивність світла, що падає, представлятимемо у вигляді червоного, зеленого і синього компонентів. Приймемо, що у білому кольорі всі три компоненти мають рівну інтенсивність (хоча

області червоного, зеленого і синього кольорів видимої частини спектру не є рівними). Така колірна модель є аддитивною системою змішування кольорів і називається *RGB* моделлю (*Red, Green, Blue*). Зазначені кольори є основними кольорами даної моделі. Відповідними додатковими кольорами є бірюзовий (*Cyan*), рожевий (*Magenta*) і жовтий (*Yellow*). Якщо основний колір скласти в рівній пропорції з його додатковим кольором, то одержимо білий колір. Таким чином, бірюзовий колір можна представити у вигляді суми зеленого і синього кольорів, рожевий – у вигляді суми синього і червоного кольорів, жовтий – у вигляді суми червоного і зеленого. Інші відтінки утворюються змішуванням основних кольорів у різних (нерівних) пропорціях. Ця модель не єдина, але вона найпоширеніша, оскільки представлення світла у вигляді зваженої суми червоного, зеленого і синього кольорів узгоджується з експериментальними даними і легко реалізується.

Відповідно до *RGB* моделі інтенсивність світла, що падає і відбивається від об'єкту, повинна бути представлена у вигляді суми інтенсивностей червоного, зеленого і синього кольорів

$$I = I_R + I_G + I_B. \quad (6.44)$$

Інтенсивність кожного кольору визначають за однією з наведених формул, у якій кожний колірний компонент має свої коефіцієнти, наприклад,

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{k_{aR} I_a}{1 + k_r (r - r_0)} + I_p (k_{dR} \cos \theta + k_{sR} \cos^n \alpha) + I_p' k_{tR} \cos^n \beta; \\ I_G &= \frac{k_{aG} I_a}{1 + k_r (r - r_0)} + I_p (k_{dG} \cos \theta + k_{sG} \cos^n \alpha) + I_p' k_{tG} \cos^n \beta; \\ I_B &= \frac{k_{aB} I_a}{1 + k_r (r - r_0)} + I_p (k_{dB} \cos \theta + k_{sB} \cos^n \alpha) + I_p' k_{tB} \cos^n \beta. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Значення інтенсивностей повинні бути нормовані при $r = r_0$. Варіюючи напрямком світла, що падає, і значеннями коефіцієнтів дифузійного відбиття, дзеркального відбиття та пропущення для різних компонентів світла, можна підібрати бажане зображення об'єкту. Якщо джерел світла небагато, то кожне з них слід враховувати у формулах (6.45) відповідними доданками.

Існують інші фізіологічні теорії зору, наприклад, теорія додаткових кольорів, а також інші колірні моделі, наприклад, модель СМУ, де основними кольорами є бірюзовий, рожевий і жовтий, а червоний, зелений і синій кольори є додатковими. Така модель є субтрактивною системою змішування основних кольорів.

6.10. Формування реалістичних зображень

Реалістичне растрове зображення геометричного об'єкту формують шляхом визначення кольору і яскравості його точок за деякою моделлю світла. Для прискорення цього процесу використовують триангуляцію поверхонь об'єкту. У результаті задача зводиться до зафарбовування триангуляційної сітки об'єкту (апроксимуючих трикутників).

У більшості випадків виконують порядкове сканування зображення. Для визначення точки об'єкту, що відбиває світло, здійснюють перетин його триангуляційної сітки зі скануючою лінією візування. Цю лінію будують із точки зображення перпендикулярно проєкційної площини (як для паралельної, так і для центральної проєкції). Пошук точок перетину ліній і трикутників спрощується, якщо його виконувати в місцевій системі координат, що пов'язана із проєкційною площиною. Для цього перед скануванням трикутники, що апроксимують геометричний об'єкт, переводять в місцеву систему координат. Координати вершин трикутників перетворюють за формулою (6.3), а компоненти векторів нормалей – за формулою

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_0 \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.46)$$

де m_1, m_2, m_3 - компоненти нормалі в глобальній системі координат; x_m, y_m, z_m - компоненти нормалі в місцевій системі координат проєкційної площини.

Перші три рядки матриці \mathbf{A}_0 утворені компонентами ортів $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ місцевої системи координат. При побудові перспективного зображення триангуляційну сітку додатково перетворюють:

координати x и y точок трикутників заміняють, відповідно, координатами x_p і y_p , обчисленими за формулами (6.10), а координату z залишають без змін. Аналогічним чином уточнимо і нормалі \mathbf{m} у вершинах трикутників: вони повинні бути повернені на кут

$$\eta = \arccos \left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{i}_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}|} \right] \quad (6.47)$$

навколо вектору

$$\mathbf{v} = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{w}) \times \mathbf{i}_z}{|(\mathbf{r} - \mathbf{w}) \times \mathbf{i}_z|} \quad (6.48)$$

де \mathbf{w} - радіус-вектор точки спостереження; \mathbf{r} - радіус-вектор точки поверхні, у якій обчислена нормаль; \mathbf{i}_z - нормаль до проекційної площини.

Поворот вектору \mathbf{m} описують формулою

$$\mathbf{m}_p = (\mathbf{v}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{m} + \cos \eta (\mathbf{E} - \mathbf{v}\mathbf{v}) \mathbf{m} + \sin \eta \mathbf{v} \times \mathbf{m}. \quad (6.49)$$

Скануюча лінія візування є ортогональною проекційній площині. У місцевій системі координат пошук її перетину з триангуляційною сіткою зводять до визначення трикутника, у проекції якого лежить проекція точки. Остання задача є двомірною, що зменшує об'єм обчислень. Для зменшення кількості переглядів проекції трикутників можна згрупувати за окремими областями.

На практиці використовують три основних способи зафарбування: *однотонна*, заснована на *інтерполяції значень інтенсивності* (метод Гуро) і заснована на *інтерполяції нормалей* (метод Фонга). Для кожної з них може застосовуватися будь-яка модель світла. Тонове зображення незалежно від способу зафарбування формується однаковою чином: для кожної точки зображення визначають точка об'єкту (або кілька точок, якщо об'єкт прозорий), від якої приходить відбите світло, і за інтенсивністю світла та оптичними властивостями поверхні, що відбиває, визначають колір точки зображення. Колір обчислюють за інтенсивностями колірних компонентів моделі світла.

6.10.1. Однотонне зафарбування

При однотонному зафарбуванні для кожного трикутника обчислюють рівень інтенсивності відбитого світла, який використовують для зафарбування всього трикутника. При цьому для простоти приймають, що θ і α є постійними в межах свого трикутника. Фактично виходить, що триангуляційна сітка є реальною поверхнею, яку моделюють, а не апроксимацією останньої. Однотонне зафарбування дає грановане зображення кривих поверхонь.

Інтенсивність відбитого світла при переході від одного трикутника до іншого міняється стрибком. Розходження в кольорі сусідніх трикутників добре помітно внаслідок смуг Маха.

6.10.2. Метод Гуро

Спосіб зафарбування, заснований на інтерполяції в межах кожного трикутника значень інтенсивності, був запропонований Гуро. У методі Гуро за значеннями нормалей у вершинах кожного трикутника визначають інтенсивності відбитого світла в його кутах. За інтенсивністю світла I_a , I_b , і I_c у вершинах a , b і c деякого трикутника інтенсивність відбитого світла від будь-якої його внутрішньої точки визначають формулою

$$I(a, b, c) = aI_a + bI_b + cI_c, \quad (6.50)$$

де a , b , c - барицентричні координати довільної точки трикутника на параметричній площині, які обчислюють за формулами [1].

Метод Гуро хоча й згладжує перепади інтенсивності на межах трикутників, але не дозволяє їх повністю усунути. Методом Гуро важко одержати чіткі відблиски, особливо, якщо вони невеликих розмірів.

6.10.3. Метод Фонга

Метод зафарбування, запропонований Фонгом, заснований на інтерполяції в межах кожного трикутника значень нормалей до поверхні. У кожній вершині трикутника $\mathbf{p}_i(u_i, v_i)$ повинна бути обчислена нормаль $\mathbf{m}_i(u_i, v_i)$ до поверхні відображуваного об'єкту. Нормалі у вершинах мають свій дійсний напрямок, а в межах

кожного трикутника приймають лінійний закон їх зміни від вершини до вершини. Нехай у вершинах $\mathbf{p}_a(u_a, v_a)$, $\mathbf{p}_b(u_b, v_b)$, $\mathbf{p}_c(u_c, v_c)$ деякого трикутника нормалі дорівнюють $\mathbf{m}_a(u_a, v_a)$, $\mathbf{m}_b(u_b, v_b)$, $\mathbf{m}_c(u_c, v_c)$, тоді нормалі на поверхні трикутника припишемо напрямком вектору

$$\mathbf{m}(a, b, c) = a \mathbf{m}_a + b \mathbf{m}_b + c \mathbf{m}_c, \quad (6.51)$$

де a, b, c - барицентричні координати довільної точки $\mathbf{p} = [u \ v]^T$ трикутника на параметричній площині, які обчислюють за формулами [1].

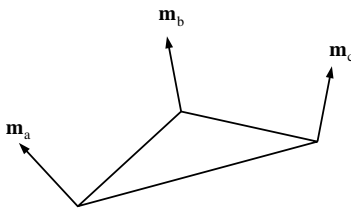


Рисунок 6.34 - Напрямок нормалей трикутника

Незважаючи на те, що вектори $\mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b, \mathbf{m}_c$ нормовані, вектор $\mathbf{m}(a, b, c)$, у загальному випадку, не має одиничної довжини і його варто нормувати. На рис. 6.34 показано трикутник і нормалі в його вершинах.

Значення радіус-вектору точки трикутника визначають

формулою

$$\mathbf{p}(a, b, c) = a \mathbf{p}_a + b \mathbf{p}_b + c \mathbf{p}_c. \quad (6.52)$$

Барицентричні координати a, b і c зв'язані рівністю [1] і в межах трикутника приймають позитивні значення. Якщо хоча б одна з барицентричних координат негативна, то це означає, що точка лежить за межами трикутника. При апроксимації (6.52) нормалі плавно міняють свій напрямок при переході від одного трикутника до іншого, тому на тонових зображеннях поверхня виглядає гладкою. Метод Фонга повністю усуває смуги Маха, однак, значно збільшує об'єм обчислень.

6.10.4. Деталізація поверхонь

Не всі поверхні мають достатню гладкість, наприклад, поверхня шліфувального кола. Деякі поверхні мають рисунок, наприклад, поверхня дерев'яних дощок.

Для створення регулярних нерівностей на поверхнях у методі

зафарбування Фонга можуть бути використані регулярні відхилення нормалі, а для створення нерегулярних нерівностей – випадкові відхилення нормалі. На рис. 6.35 і 6.36 показані тіла, нормаліям поверхонь яких надані випадкові відхилення [1]. На рис. 6.35 випадкові відхилення нормалі від початкового положення сягають 10° , а на рис. 6.36 – 60° .



Рисунок 6.35 - Нерівності на поверхні тору



Рисунок 6.36 - Нерівності на поверхні сфери

На поверхню об'єкту, який моделюють, може бути нанесений малюнок, подібний до малюнка на стінних шпалерах. Малюнок виконують кольором, який описують на параметричній площині поверхні. Опис може бути аналітичним або виконаним шляхом накладення деякого малюнка на площину параметрів поверхні. Малюнок у свою чергу може бути растровим зображенням. Растровий малюнок розглядатимемо як набір кольорових точок на цілочисельній площині. Для нанесення малюнка на поверхню залишається встановити функціональну залежність між цілочисельною площиною та площиною параметрів поверхні. Деталізацію поверхні виконують методом Фонга.

6.10.5. Тіні

У розглянутих способах зафарбування було прийнято, що на точки поверхні падає розсіяне світло інтенсивності I_a і спрямоване світло інтенсивності джерела I_p . Це завжди справедливо, коли точка спостереження збігається з положенням джерела світла. У загальному випадку деяка частина поверхні об'єкту буде закрыта від джерела, тобто буде перебувати в тіні. Алгоритм визначення затінення точок аналогічний алгоритму визначення видимості точок. Якщо точка поверхні «видна» із точки джерела світла, то вона освітлена. Ті точки поверхні об'єкту, які видно із точки

спостереження і з джерела, освітлені розсіяним і спрямованим світлом. Точки поверхні об'єкту, які видно із точки спостереження, але не видно із джерела світла, перебувають у тіні і освітлені тільки розсіяним світлом. Це ж справедливо і для декількох джерел світла. Природньо, що при побудові тіней об'єм обчислень збільшується. На рис. 6.37 наведено зображення об'єктів з тінями.

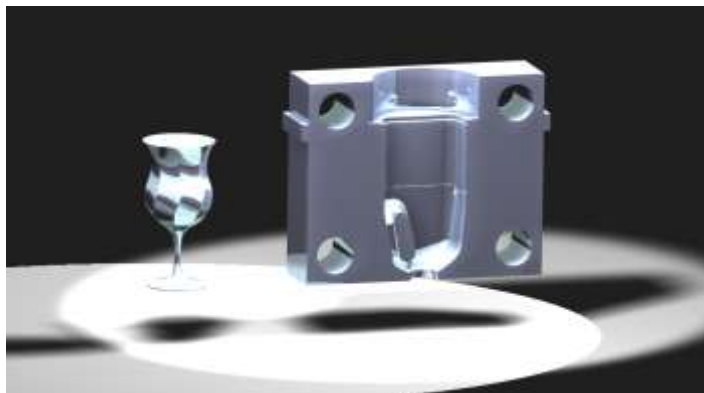


Рисунок 6.37 – Об'єкти та їх тіні

Чіткі тіні дають точкові джерела світла. При висвітленні об'єкту розподіленими джерелами світла виникають області напівтіней. Півтіні виникають у тих точках об'єкту, з яких видно тільки частину розподіленого джерела.

6.10.6. Прозорість

Для прозорих моделей у точку спостереження приходять світло, відбите не тільки від найближчої поверхні, але і від інших поверхонь, які видно крізь неї. Якщо не враховувати заломлення світла, то в точку спостереження прийде світло від всіх трикутників, з якими перетинається лінія візування.

При моделюванні заломлення світла лінія візування для закритих трикутників повинна бути зміщена. Інтенсивність світла, що прийшло від кожної поверхні, буде ослаблена через поглинання світла речовиною. Щоб визначити, які зі світлових променів попадають у точку зору, використовують метод трасування променів.

Трасування починають із точки спостереження і промені світла відслідковують у зворотному напрямку до кожного джерела світла. Промінь світла, що падає на поверхню, розділяють на декілька основних частин: дифузійно пропущене світло, пропущене заломлене світло, дифузійно відбите світло та дзеркально відбите світло. Аналогічно промінь світла, що виходить від поверхні об'єкту, є сумою двох відбитих складових світла і двох складових світла, що прийшли через поверхню. Таким чином, кожного разу, коли промінь, який трасується із точки спостереження, підходить до поверхні відображуваного об'єкту, можлива поява декількох нових променів, тобто промінь розщеплюється на декілька складових. Дифузійно відбите світло та дифузійно пропущене світло можуть прийти в загальному випадку з нескінченного числа напрямків, тому зазвичай трасують тільки промені світла, що з'являються в результаті дзеркального відбиття і заломлення. У результаті, при підході променя, який трасують, до поверхні прозорого об'єкту він розщеплюється на дві частини. Розсіяне світло і дифузійно відбите світло можна одержати від найближчої до точки спостереження поверхні. Для кожного променя, який трасують, потрібно одержати його перетин з усіма поверхнями об'єкту. У точках перетину за властивостями поверхні визначають, чи потрібно розщеплювати світловий промінь.

Побудова реалістичних зображень геометричних моделей вимагає досить великих обчислювальних витрат. Геометричне моделювання має величезні можливості. Через комп'ютерну графіку воно дозволяє побачити і дослідити те, що раніше могло існувати тільки в уяві.

Питання для самостійного контролю.

1. Дайте загальну характеристику засобам і методам візуалізації геометричних об'єктів.
2. Які є основні особливості рівнобіжних проєкцій на площину?
3. Які є основні особливості центральних проєкцій на площину?
4. Які основні принципи побудови полігонів кривих і поверхонь?

5. Охарактеризуйте особливості побудови ліній нарису для рівнобіжних і центральних проєкцій на площину.

6. Які основні особливості визначення видимої частини геометричних об'єктів при використанні векторної і растрової графіки?

7. Які основні принципи тріангуляції поверхонь і тіл?

8. Які особливості тріангуляції Делоне?

9. Охарактеризуйте області використання тріангуляції тіл.

10. Дайте загальну характеристику засобам і методам моделювання світла.

11. Які є загальні принципи опису кольору?

12. Дайте загальну характеристику шляхів формування реалістичних зображень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. - М.: Изд-во Физ.-мат. лит., 2002. - 472.
2. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE). - Санкт-Петербург: Изд. дом ПИТЕР, 2004. - 560 с.
3. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение: Пер. с англ. - М.: Мир, 1989. - 478 с.
4. Никулин Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики: Учебн. пособ. - СПб.: БХВ-Петербург, 2003. - 560 с.
5. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики: Пер. с англ. - М.: Мир, 2001. - 604 с.

Навчальне видання

Грабченко Анатолій Іванович,
Доброскок Володимир Ленінмирович

ТЕОРІЯ 3D МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник
для студентів машинобудівних спеціальностей

Відповідальний за випуск А.І. Грабченко
Роботу рекомендував до видання О.М. Шелковой

План 2009 р., поз.

Підписано до друку 10.06.2009. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Папір офсетн.
Друк – різнографія. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 8,0.
Наклад 100 прим. Зам. № 391. Ціна договірна.

Видавництво НТУ "ХПІ".

Свідоцтво про внесення до державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Видавництво Курсор.

Свідоцтво про внесення до державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 21 від 24.03.2000 р.
61057, м. Харків, пр. Театральний 11/13
т. (057) 714-38-74, 706-31-73

Віддруковано в типографії
ТОВ СУНП "Бруксафоль - Курсор Фолієн"
61057, м. Харків, пр. Театральний 11/13
т. (057) 714-38-74, 706-31-73